Algebra

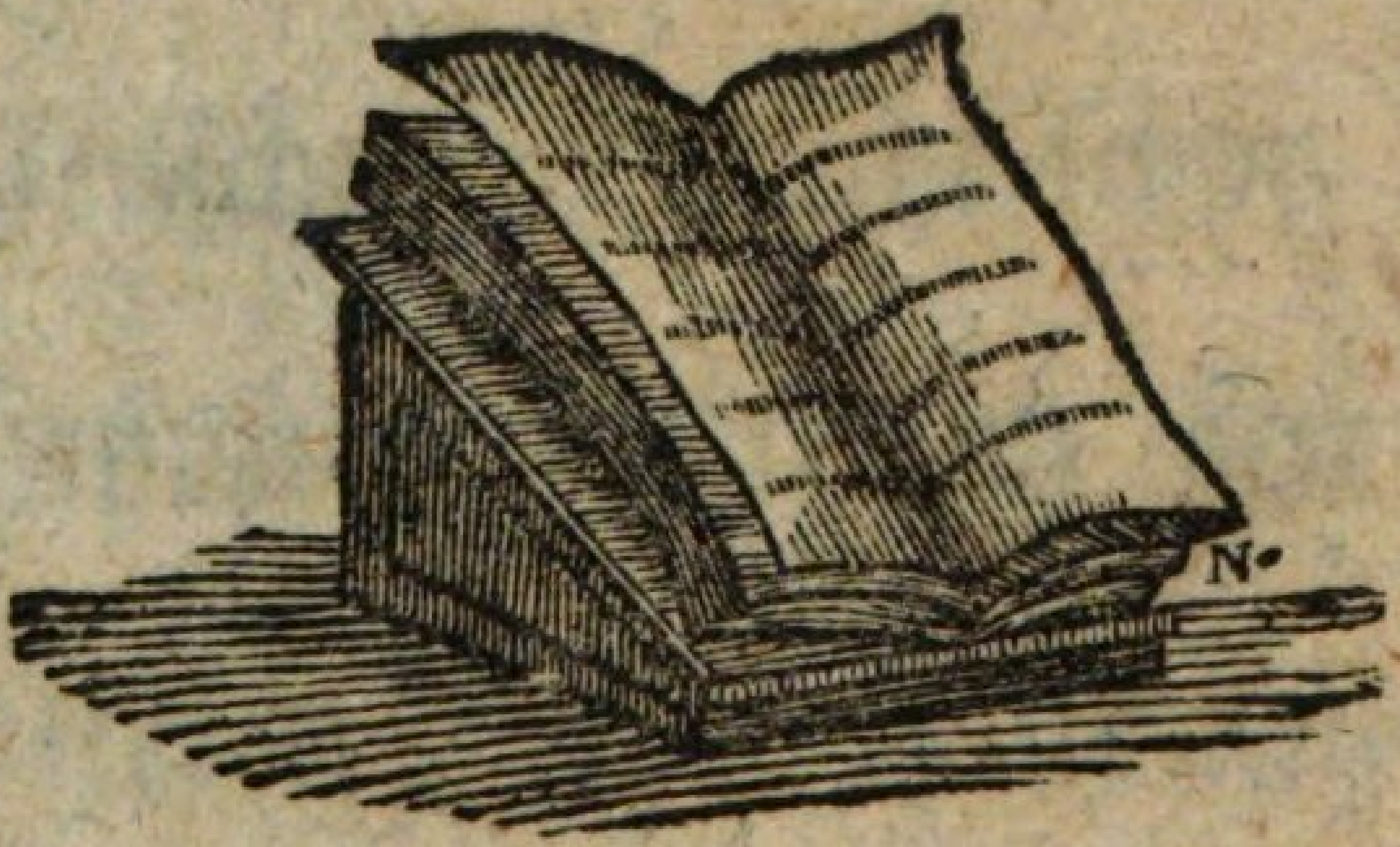
nach neuen Grundsätzen

bearbeitet

von

J. v. Ranson,

Ingenieur.



München,

gedruckt in der Franzischen Hof- u. Landschaftsbuchdruckerey

1800.

Durchlauchtigster Churfürst,
gnädigster Herr Herr!

Gegenwärtiges Resultat meiner äußerst beschränkten mathematischen Kenntnisse, enthält die Verbesserung der Theorie, einer Wissenschaft, welche schon seit mehreren Jahrhunderten, von den größten Mathematikern, als vollkommen angenommen worden.

Jedoch beweisen meine Gründe, daß diese Wissenschaft wirklich einer Verbesse-

rung

rung unterworfen seye, indem ich unerwiesene, und nicht selten ungegründete Voraussetzungen mit Grundsätze verwechsle, welche der strengsten Zergliederung nach den Gesetzen der reinen Vernunft empfänglich sind.

Die Ueberzeugung hievon giebt die Folge, daß nach diesen meinen Grundsätzen, alles was bisher als wahr erkannt

wor=

worden, nicht allein durch das Resultat, sondern auch durch die Mittel wahr bleibt, die Algebra hört also in dieser Rücksicht auf, ein magisches Blendwerk zu seyn, und wird in allen ihren Theilen allgemeines Gesetz der Größen.

Wenn ich so glücklich bin, durch diese Entdeckung Höchstdero Beyfall zu erreichen, meinem Vaterlande und der Welt

im

im Allgemeinen zu nützen, so ist der höchste Zweck meines Lebens erreicht.

Euer Churfürstlichen Durchlaucht

unterthänigst treu- gehorsamster Diener
J. v. Ranson,
Ingenieur,

Vorrede.

Nachfolgendes Werk enthält eine verbesserte Theorie der Algebra in dem ganzen Umfange des Worts, denn sie giebt nicht allein eine Methode an, welche leichter, und mit reiner Vernunft vereinbarer ist, als die gewöhnliche, sondern sie führt auch in vieler Rücksicht zu richtigern Resultaten. Diejenigen, welche gründlich die allgemeine Lehrart der Algebra kennen, werden die Möglichkeit einer Verbesserung ihrer Theorie wenigstens geahndet haben, die-

jenigen

jenigen aber, welche nicht zu Zweifeln gewohnt sind, können sich durch folgendes unterrichten.

Der Verfasser.

Von der Algebra
erster Abschnitt.

In welchem die Grundsätze der Berechnung algebraischer Größen gegeben werden.

1.

Der Zweck der Wissenschaft, welche man Algebra nennt, ist, alle auf Größen sich beziehende Aufgaben, nach allgemeinen Gesetzen aufzulösen.

Man hat daher die zu behandelnden Größen, durch allgemeine Zeichen als z. B. die Buchstaben

des lateinischen Alphabets, vorgestellt, und überdies die Gesetze nach denen selbe auf einander wirken, und ihre Verhältnisse untereinander mit besondern Strichen und Punkten bezeichnet.

Man erreicht hiedurch den Vortheil, daß man immer den Gang der Operationen vor sich sieht, und daß, da ein Buchstabe, alle erdenkliche arithmetische Größen vorstellen kann, jede algebraische Wahrheit, allgemeines arithmetisches Gesetz wird. — So wie überhaupt dieses in Rücksicht aller Größen anwendbar ist.

Allgemeines Gesetz der Addition.

1) Wenn zwey oder mehrere Grössen, aufeinander wirken, so werden sie sich vermehren oder vermindern. Sie vermehren sich, wenn sie sich nicht entgegengesetzt sind — Wenn also a und b als allgemeine Vorstellung von Grössen sich nicht entgegengesetzt sind, so wird die Wirkung der Größe b auf die Größe a, Vermehrung dieser Größe um ihren Werth seyn.

2) Diese Wirkung wird durch (+) (plus) oder (mehr) (da sie Vermehrung ist) bezeichnet: wenn wir nun das Resultat dieser Wirkung durch (s) (Summa)

Erste Tafel

Beyspiele der Addition enthaltend.

zu S. 3.

Es sey a = 8, b = 6, c = 4, d = 2, m = 9, p = 7, r = 5, x = 2, z = 1, so wird

1)	$5a + 3b + 2c$	gleich	$5 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 4$ zu
	zu $9a + 9b$ ⊘ $+ 3d$		$9 \cdot 8 + 9 \cdot 6$ ⊘ $+ 3 \cdot 2$
	$14a + 12b + 2c + 3d = s$		$14 \cdot 8 + 12 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2$
2)	$6a + 12b + 8c + 3d$		$6 \cdot 8 + 12 \cdot 6 + 8 \cdot 4 + 3 \cdot 2$
	$14a + 1b + 2c + 5d$		$14 \cdot 8 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2$
	$20a + 13b + 10c + 8d = s$		$20 \cdot 8 + 13 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 8 \cdot 2$
3)	$8m + 2p + 6r + x$		$8 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 2$
	$4m + 9p$ ⊘ $+ 5x + 3z$		$4 \cdot 9 + 9 \cdot 7$ ⊘ $+ 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1$
	$12m + 11p + 6r + 6x + 3z$		$12 \cdot 9 + 11 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 3$

NB. Da $1 \cdot b = b$ ist, so läßt man diese Einheit gemeiniglich weg, doch ist es sehr nöthig, wenn man deren Buchstaben, Zahlen substituirt, auf dieselbe Rücksicht zu nehmen.

(Summa) bezeichnen, so ist das allgemeine Gesetz der Addition a + b = s. d. i. das Ganze ist gleich seinen Theilen.

3) Wären nun a und b bestimmte Größen, so würde s ebenfalls eine bestimmte Größe seyn; die Buchstaben sind folglich nur in so lang allgemeine Zeichen, bis ihre Werthe bestimmt sind.

4) Da das Zeichen (+) als die Wirkung nicht entgegengesetzter Größen aufeinander, bezeichnend, Vermehrugs-(Additons) Zeichen ist, und dieses Zeichen weder zu der Größe gehört vor welcher, noch zu jener nach welcher es steht, sondern nur die Wirkung der Größe, aufeinander anzeigt, zwischen welchen es steht, so folgt, daß, eine Addition gleicher Zeichen, wie sie allgemein angenommen worden, nicht statt hat.

Beyspiele der Addition.

Es sey Tafel I. B. I. $5a + 3b + 2c$ gegeben, man soll, diese Größen um $9a + 9b + 3d$ vermehren, so erhält man, da nicht Buchstaben als allgemeine Zeichen, sondern nur ihre (Coefficienten) (Multiplicatores) addirt werden können, durch die Addition der Coefficienten gleich ausgedrückter Größen

$$14a + 12b + 2c + 3d = S.$$

Nach obigen Lehrsätzen und diesen Beyspielen wird es den Anfängern leicht seyn, alle algebraische ganze Größen zu addiren, von welchen bisher Erwähnung geschehen.

Allgemeines Gesetz, der Subtraktion.

1) Die Wirkung zweyer sich entgegengesetzten Größen aufeinander ist Verminderung der Grössern um die Zahl der Einheiten der kleineren, welche hiedurch gleich Null werden, der Rest aber die Differenz der beyden Größen anzeigt, welcher ebenfalls Null ist, wenn die beyden abzuziehenden Größen gleich sind.

2) Wenn man nun die größere a, und die kleinere b nennt, und diese Wirkung, dieser sich entgegengesetzten Größen aufeinander, durch (—) (minus) (weniger) (da sie Verminderung ist) bezeichnet, ferner das Resultat dieser Wirkung (d) (differenz) nennt, so ist, das allgemeine Gesetz der Subtraction $a - b = d$, es ist also $b + d = a$ und $a - d = b$. Aus den letztern zwey Formuln sieht man, wie man sich zu benehmen hat, um sich zu überzeugen, ob man richtich abgezogen habe.

Beyspiele der Subtraction enthaltend.

zu S. 5.

Es sey $a = 8$, $b = 6$, $c = 4$, $d = 2$, $m = 9$, $p = 7$, $r = 5$, $x = 2$, $z = 1$ so wird

1)
$$\begin{array}{l} 14a + 12b + 2c + 3d \\ -\ 5a + 3b + 2c \\ \hline 9a + 9b \ \oslash \ + 3d \end{array} \quad \text{gleich} \quad \begin{array}{l} 14 \cdot 8 + 12 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \\ -\ 5 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \\ \hline 9 \cdot 8 + 9 \cdot 6 \ \oslash \ + 3 \cdot 2 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l} 20a + 13b + 10c + 8d \\ -\ 6a + 12b + 8c + 3d \\ \hline 14a + 1 \cdot b + 2c + 5d \end{array} \qquad \begin{array}{l} 20 \cdot 8 + 13 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 8 \cdot 2 \\ -\ 6 \cdot 8 + 12 \cdot 6 + 8 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \\ \hline 14 \cdot 8 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{l} 12m + 11p + 6r + 6x + 3z \\ -\ 4m + 9p \ \oslash \ + 5x + 3z \\ \hline 8m + 2p + 6r + x \end{array} \qquad \begin{array}{l} 12 \cdot 9 + 11 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ -\ 4 \cdot 9 + 9 \cdot 7 \ \oslash \ + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ \hline 8 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{l} a + b \\ -\ c - d \\ \hline a + b - c - d \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8 + 6 \\ -\ 4 - 2 \\ \hline 8 + 6 - 4 - 2 = 14 - 2 = 12. \end{array}$$

Beyspiele der Subtraction.

Es seye Tafel 2. B. 1. $14a + 12b + 2c + 3d$ gegeben, man soll $5a + 3b + 2c$ davon abziehen, man erhält also $14a + 12b + 2c + 3d - 5a + 3b + 2c = 9a + 9b + 3d$.

Anmerkung. Daß hier ebenfalls nur die Coefficienten abgezogeg werden können, ist von sich klar.

Allgemeines Gesetz der Multiplication.

1) Der Fall, wo eine Größe, so oft zu sich selbst addirt wird, als eine andere, oder sie selbst, Einheiten enthält, heißt, wenn die Operation wie in der Arithmetik, verkürzt worden, auch in der Algebra, Multiplication; es wird also, wenn das Mutltiplicandum a, der Multiplicator b, und p das Product ausdrückt: $a \times b = a . b = ab = p$; wo die Ausdrücke $a \times b$, $a . b$, ab verschiedene Arten die Multiplication anzuzeigen, ausdrücken.

2) Wenn die zu multiplicirende Größe, und der Multiplicator andere Coefficienten als die Einheit haben, so setze man ihnen nach obiger Art angezeigten Producten, das Product dieser Coefficienten vor, so wird $24a \times 6b = 144\, ab = p$ wäre $24a \times b$ gegeben, so erhält man $24ab = p$ und wenn $a \times 6b$ gegeben, so erhält man $6ab = p$. Da

nun

nun $4a \times 2b = 8ab = ab + ab + ab + ab + ab + ab + ab + ab$, so folgt, daß die Multiplication der Algebra — nichts als eine verkürzte Addition seye. Wenn eine Größe ihr eigener Multiplicator wird, das heißt, so oft wiederholt werden soll, als sie Einheiten enthält, wie $aa = a^2 = p$, so heißt ein solches Product die zweyte Würde der Größe a, wird dieses Product noch einmal auf dieselbe Art wiederholt, so heißt das neue Product die 3te Würde, oder auch Potenz, der Größe a u. s. w. — wenn man statt aaa, a^3 setzt, wie man allgemein angenommen hat, so heißt die Zahl 3 der Exponent der Größe, wenn nun die Größe a, m mal durch die Zahl ihrer Einheiten multiplicirt worden, so wird m ihr Exponent, und man erhält folglich a^m.

3) Wäre nun $aa = a^2$ mit $aaa = a^3$ zu multipliciren, so erhält man $aaaaa = a^5 = a^{2+3}$, wenn folglich gleichartige Exponential-Größen mit einander multiplicirt werden sollen, so multiplicire man ihre Coefficienten und addire ihre Exponenten.

4) Wenn ungleichartige Exponential-Größen multiplicirt werden sollen, so setze man ihnen das Product ihrer Coefficienten vor, und setze sie

mit

Beyspiele der Multiplication enthaltend.

zu S. 7.

1)
$$\begin{array}{c} a + b \\ a + b \\ \hline (a^2 + ab) + (ab + b^2) \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{c} a + b \\ c + d \\ \hline (ac + bc) + (ad + bd) \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{c} a - b \\ a - b \\ \hline (a^2 - ab) - (ab - b^2) \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{c} a - b \\ c - d \\ \hline (ac - bc) - (ad - bd) \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{c} a + b \\ a - b \\ \hline (a^2 + ab) - (ab + b^2) \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{c} a + b \\ c - d \\ \hline (ac + bc) - (ad + bd) \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{c} a - b \\ a + b \\ \hline (a^2 + ab) + (ab - b^2) \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{c} a - b \\ c + d \\ \hline (ac - bc) + (ad - bd) \end{array}$$

Es sey $a = 6$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 3$ so wird

1)
$$\begin{array}{c} 6 + 4 \\ 6 + 4 \\ \hline (36 + 24) + (24 + 16) \\ \hline 60 + 40 = 100 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{c} 6 + 4 \\ 5 + 3 \\ \hline (30 + 20) + (18 + 12) \\ \hline 50 + 30 = 80 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{c} 6 - 4 \\ 6 - 4 \\ \hline (36 - 24) - (24 - 16) \\ \hline 12 - 8 = 4 \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{c} 6 - 4 \\ 5 - 3 \\ \hline (30 - 20) - (18 - 12) \\ \hline 10 - 6 = 4 \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{c} 6 + 4 \\ 6 - 4 \\ \hline (36 + 24) - (24 + 16) \\ \hline 60 - 40 = 20 \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{c} 6 + 4 \\ 5 - 3 \\ \hline (30 + 20) - (18 + 12) \\ \hline 50 - 30 = 20 \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{c} 6 - 4 \\ 6 + 4 \\ \hline (36 - 24) + (24 - 16) \\ \hline 12 + 8 = 20 \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{c} 6 - 4 \\ 5 + 3 \\ \hline (30 - 20) + (18 - 12) \\ \hline 10 + 6 = 16 \end{array}$$

mit ihreu Eponenten neben einander, z. B. $ma^r \times nb^q = mna^r b^q = p$.

5) Man sieht hieraus wie sehr Coefficienten von Exponenten verschieden sind, daher sie niemals miteinander verwechselt werden dürfen.

6) Wenn Größen miteinauder multiplicirt werden sollen, welche durch Additions- oder Subtractions-Zeichen mit einander verbunden sind, so sétze man dem Producte die Zeichen vor, wie es die Bedingnisse der zu behandelnden Größen anzeigen.

Beyspiele der Multiplication.

Es seye Tafel 3. B. 1. $a + b$ mit $a - b$ zu multipliciren, so erhält man $(a^2 + ab) - (ab + b^2)$, da nun $ab - ab = o$, so bleibt vermög dem Transpositions-Gesetz $a^2 - b^2 = p$. Da dieses Resultat in aller Rücksicht, den Bedingnissen der Aufgabe entspricht, so ist dieselbe keiner Kritik unterworfen.

Die Aufgabe sagt, daß Product von $a + b$ multiplicirt durch b, von dem Product $a + b$ multiplicirt mit a abziehen.

Nach den in der 3. Tafel angezeigten Fällen der Multiplication, und obigen wird es also leicht seyn, ein jedes Product algebraischer Größen zu finden, nur halte man sich in Rücksicht der Additions- und Subtraceions-

Zei-

Zeichen genau an das in der Subtraction angezeigte Reductions-Gesetz bey Summirung mehrerer derley Producten, und man erhält ohne Anstand ein richtiges Product. Es seye z. B. $5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^2$ mit $4a^2 - 5ab + 2b^2$ zu multipliciren, so wird das erste Product gleich $(20a^5 - 16a^4b + 20a^3b^2 - 12a^2b^2)$ das zweyte Product wird $(25a^4b - 20a^3b^2 + 25a^2b^3 - 15ab^3)$, und endlich das dritte $(10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^4)$ da nun das zweyte Product von den ersten abgezogen werden muß, und das dritte zu dem zweyten addirt, vermög den Operationszeichen, welche vor den Multiplicatoren stehen, so erhält man $(20a^5 - 16a^4b + 20a^3b^2 - 12a^2b^2) - (25a^4b - 20a^3b^2 + 25a^2b^3 - 15ab^3) + (10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^4)$.

Da in diesen Resultaten ungleiches auf gleiches wirkt, so hat keine weitere Operation statt, da hiedurch gleiche Größen, in ungleiche verwandelt werden, man muß sich daher begnügen, die weitern Opererationen, welche mit diesen Producten vorgenommen werden sollen, nur anzuzeigen, und denselben Werthe bey der Substituirung den ihnen gleich gesetzten arithmetischen Größen, jedes Products für sich zu bestimmen, und endlich diese Reihe von Producten den sich zwischen ihnen befindenden Operationszeichen verhältnißmäßig zu entwickeln.

Nach obiger Tafel wird es dem Anfänger leicht seyn, die Summa zweyer arithmetischer Größen zu ihrer zweyten Würde zu erheben, so wird nach dem ersten Beyspiel der 5ten Tafel, wenn zum Beyspiel $8 + 4$ zum Quadrat zu erheben wäre $a^2 = 64$ d. i. $a = 8$, und $b = 4$, $ab = 32$, und $b^2 = 16$ folglich $(a^2 + ab)$

$+(ab+b^2)=(64+32)+(32+16)=(96)$ $+(48)=144=\overline{8+4}^2=(12)^2$, wollte man nun $(12)^3$ haben, so multiplicire man $\overline{(a^2+ab)+(ab+b^2)}$ mit $a+b$ und man erhält $\overline{(a^3+a^2b)+(a^2b+ab^2)}$ $+\overline{(a^2b+ab^2)+(ab^2+b^3)}$, wenn man uun eben so $a=8$, $b=4$ setzt, und diese Werthe den Buchstaben substituirt, so wird obige Formul $(512+256)$ $+(256+128)+(256+128)+(128+64)$ $=(12)^3=1728$. Eben so verhält es sich, wenn man $(8-4)^3=4^3$ nach der Formul $\overline{(a^3-a^2b)-(a^2b-ab^2)}$ $-\overline{(a^2b-ab^2)-(ab^2-b^3)}$ bestimmen sollte, welches dem Anfänger zur Uebung dienen mag.

Anmerkung 1. Was Producte wie $(a+b)$ $\times(a-b)$ betrift, so ist klar, daß dieselben niemals eine zweyte Würde weder von $(a+b)$ noch von $(a-b)$ seyn können.

Anmerkung 2. Man kann in den Fällen, wo eine Zahl, ziemlich großer algebraischer Producte, wie z. B. jene des letzt gegebenen Beyspiels der Multiplication noch anderen Operationen unterworfen sind, um sich dieselben zu erleichtern, diese Producte anderen Buchstaben gleich annehmen, und diesen nach geendigter Operation ihre ihnen gleich gesetzten Größen substituiren: nur muß man bemerken, daß diese substituirte Buchstaben mit den nämlichen Bedingnissen aufeinander wirkend, angezeigt werden

müs=

müssen; so könnte man z. B. die Reihe von Producten $(20a^5 - 16a^4b + 20a^3b^2 - 12a^2b^3) - (25a^4b - 20a^3b^2 + 25ab^3 - 15ab^4) + (10a^3b^2 - 8a^2b^2 + 10ab^4 - 6b^5) = m - n + p$ setzen, wenn man nun z. B. diese Producte mit $a + b - c$ multipliciren sollte, so würde man durch die Substitution $(m - n + p) \times (a + b - c)$ erhalten $(am - an + ap) + (bm - bn + bp) - (cm - cn + cp)$. Wäre nun keine Operation mehr mit $m - n + p$ vorzunehmen, so substituire man ihre Werthe, und man erhält, diese Reihe von Producte multiplicirt mit a, mehr dieselbe Reihe multiplicirt mit b, weniger derselben Reihe multiplicirt mit c, diese Operation dem Anfänger zur Uebung.

Allgemeines Gesetz der Division.

1) Eine Größe m mal wiederholen heißt sie multipliciren, die Größe wieder finden, in dem Zustande in welchem sie sich vor der Vermehrung befand heißt, wie in der Arithmetik, auch in der Algebra, dividiren, theilen.

2) Wie die Coefficienten algebraischer Größen berechnet werden, so werden sie hier getheilt (vermindert) da die Division, wie die Multiplication nichts als verkürzte Addition und Subtraction ist, wie

man

man aus der Arithmetik weiß. Man erhält also, wenn die Größe a durch die Größe b getheilt werden soll, und q (quotus) angezeigt, wie vielmal b in a enthalten sey, a : b, $\frac{a}{b} = q$, und folglich $a = bq$ diese letzte Formul dient: sich zu überzeugen, ob die Theilung richtig geschehen ist. Hätte die zu theilende Größe und der Theiler Coefficienten, wie z. B. $\frac{ma^2}{na} = q$, so würde in dem Falle daß $m = 15$, $n = 3$, der Werth von $q = 5a$, so daß also $\frac{15a^2}{3a} = 5a$ und $5a \times 3a = 15a^2$ wird. Sind die so aufeinander wirkenden Größen ungleichartig, so bleibt, wenn sie auch schon Coefficienten haben, die Operation angezeigt, da die Coefficienten ungleichartiger Größen, ungleichartig sind. So wird $\frac{mb}{np} = q$ und $mb = anpq$.

3) Sind Exponential - Größen gleicher Art, durch einander zu theilen wie $\frac{aaaaa}{aa}$ so wird $aaa = a^3$ da $\frac{aa}{aa} = 1$, wenn man nun $aaaaa = a^5$ und $aa = a^2$ setzt, so wird $\frac{a^5}{a^2} = a^3 = q$, da nun $a^3 = a^{5-2}$ ist,

so

so folgt, daß man um gleichartige Exponential-Größen durch einander zu theilen, nur den Exponenten des Divisors (Theilers) von jenem des Dividendi (der zu theilenden Größe) abziehen dürfe.

4) Bey der Theilung zusammengesetzter Größen bemerke man, daß nebst dem was bisher gelehrt worden, noch auf die Verbindungs-Zeichen der zu theilenden Größen Rücksicht genommen werden muß, und zwar nach folgenden Gesetzen; 1tens: Haben die Glieder der Producte alle summarische Zeichen, und sind mit solchen unter sich verbunden, so hat der Theiler, und das Resultat, (Quotus) ebenfalls summarische Zeichen. 2tens: Haben die Glieder der Producte subtrahirende Zeichen, und sind mit solchen verbunden, so hat der Theiler, und Quotus, eben solche Zeichen, d. i. die Theile sind gleich dem Ganzen. Eben so verhält es sich auch, wenn die zu theilenden Producte durch andere Zeichen als ihre Glieder verbunden sind; hat der Theiler mit denen die Glieder der Producte verbindenden Zeichen, gleiche Zeichen, so erhält der Quotus, mit denen die Producte verbindende Zeichen, ebenfalls gleiche Zeichen, und so umgekehrt.

5) Wenn

5) Wenn man von einer Größe, welche zu ihrer m^te^ Würde erhoben worden, wie z. B. a^m, wieder auf sie zurückkommen wollte, so nehme man diese Größe, mit dem Exponenten a^{m-1} und dividire dieselbe, mit diesem, so zubereiteten Theiler; es wird folglich $\frac{a^m}{a^{m-1}} = a^1$, man nennt, das Resultat a^1, Wurzel der Größe a^m, welches man auch wie $\sqrt[m]{a^m} = a^1$, wo der Exponent des Wurzelzeichen ($\surd$) anzeigt, daß der m^te^ Theil der Factoren der gegebenen Exponential-Größe genommen werden sollte, welcher die Wurzel der Größe ist, so wird $\sqrt[4]{a^4} = a^1 = \frac{aaaa}{aaa} = \frac{a^4}{a^{4-1}} = \frac{a^4}{a^3} = a^{4-3} = a^1$, welches lauter verschiedene Arten sind, das Gesetz der Wurzel einer eintheiligen Exponential - Größe zu bestimmen, auszudrücken.

6) Wenn eine Größe die Einheit zum Exponenten hat, so läßt man denselben immer weg, da $a^1 = a$. — Wenn nun eine Größe auf sich selbst entgegengesetzt wirkt, so wird ihr Coefficient, und Exponent Null, z. B. $1a^1 - 1a^1$, oder $ma^r - ma^r = 0$. Man bemerke ferner, daß, da $\frac{a}{a} = 1$, auch $a^{1-1} = 1$ seyn wird, da das Subtrac-

tractions - Zeischen zwischen Exponenten als Divisions - Zeichen auf diese Größen wirkt, wie schon erwiesen worden; eben so verhält es sich mit dem Additions - Zeichen zwischen Exponenten, welches dann ebenfalls eine Multiplication anzeigt, da also der Ausdruck 1 — 1 in diesem Falle nicht mit dem allgemeinen Ausdruck $1 - 1 = 0$ verwechselt werden darf, da ersterer relatif, und gleich $\frac{a^1}{a^1}$ aber nicht gleich $a^1 - a^1 = 0$ gesetzt worden. Der Ausdruck $0 \cdot a$ heißt die Größe nicht multipliciren, und a^0 heißt die Größe a zu keiner Würde erheben, sie bleiben also in ihren vorigen Zustande. — Der Wirkungskreis des nichts ist nichts — eine Größe kann daher nur durch eine ihr entgegesetzte Wirkung ihrer selbst, Null werden.

7) Da nun nach obigen Lehrsätzen, die Producte, immer ihren Factoren gleiche Zeichen haben, und diese in dem Falle da beyde Factoren gleich sind, nicht ungleich seyn können, so folgt, daß, wenn eine mehrtheilige Größe, zu irgend einer Würde erhoben worden, man nur, um deren Wurzel zu bestimmen, die höchsten Exponential - Größen, welche sich in dieser m^{ten} Würde befinden, jede für sich nach der Art, wie die eintheiligen Expo-

nen-

Beyspiele der Division enthaltend.

Es sey $a = 6$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 3$ so wird

1) $$\begin{array}{rl|l} & (ac+bc)+(ad+bd) & \underline{a+b} \\ - & (ac+hc)+(ad+bd) & c+d \end{array} = \begin{array}{rl|l} & (30+20)+(18+12) & \underline{6+4} \\ - & (30+20)+(18+12) & 5+3 \end{array}$$

2) $$\begin{array}{rl|l} & (ac-bc)-(ad-bd) & \underline{a+b} \\ - & (ac-bc)-(ad-bd) & c-d \end{array} = \begin{array}{rl|l} & (30-20)-(18-12) & \underline{6-4} \\ - & (30-20)-(18-12) & 5-3 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{rl|l} & (ac+bc)-(ad+bd) & \underline{a+b} \\ - & (ac+bc)-(ad+bd) & c-d \end{array} = \begin{array}{rl|l} & (30+20)-(18+12) & \underline{6+4} \\ - & (30+20)-(18+12) & 5-3 \end{array}$$

4) $$\begin{array}{rl|l} & (ac-bc)+(ad-bd) & \underline{a-b} \\ - & (ac-bc)+(ad-bd) & c+d \end{array} = \begin{array}{rl|l} & (30-20)+(18-12) & \underline{6-4} \\ - & (30-20)+(18-12) & 5+3 \end{array}$$

1) $\sqrt{}(a^2+ab)+(ab+b^2) = a+b = \sqrt{}(36+24)+(24+16) = 6+4$

2) $\sqrt{}(a^2-ab)-(ab-b^2) = a-b = \sqrt{}(36-24)-(24-16) = 6-4$

3) $$\begin{array}{rl|l} & (a^2+ab)-(ab+b^2) & \underline{a+b} \\ - & (a^2+ab)-(ab+b^2) & a-2 \end{array} = \begin{array}{rl|l} & (36+24)-(24+16) & \underline{6+4} \\ - & (36+24)-(24+16) & 6-2 \end{array}$$

4) $$\begin{array}{rl|l} & (a^2-ab)+(ab-b^2 & \underline{a-b} \\ - & (a^2-ab)+(ab-b^2 & a+b \end{array} = \begin{array}{rl|l} & (36-24)+(24-16) & \underline{6-4} \\ - & (36-24)+(24-16) & 6+4 \end{array}$$

nential-Größen behandeln müße, und diese gefundene Wurzeln, mit den nämlichen Zeichen verbinden müße, mit welchen alle Glieder, und Producte der Würde verbunden sind.

8) Wenn eine algebraische Größe gegeben, welche etwas mehr als die m^{te} Würde einer Größe enthält, jedoch ohne die $m+1^{te}$ Würde zu erreichen, so ziehe man die Wurzel der m^{te} Würde aus, und verbinde dieselbe, mit dem Rest, durch das Additionszeichen, nachdem man demselben, das verhältnißmäßige Wurzel-Zeicheu, vorgesetzt hat.

9) Die Behandlung arithmetischer Größen, in dieser Rücksicht bleibt ganz der allgemeinen Methode unterworfen, und ist in jedem Lehrbuche zu finden.

Beyspiele der Theilung (Division.)

Es seye 4te Tafel $(a^2 + ab) - (ab + b^2)$ durch $a + b$ zu theileu, man theile das 1te Product durch $a + b$, so erhält man a zum Quotienten, folglich $(a^2 + ab) - (a^2 + ab) = 0$, eben so verfahre man mit dem 2ten Product wo man b zum Quotienten erhält, welchem das Zeichen der Subtraction vorgesetzt werden muß, so daß also, das 2te Product $(ab + b^2) - (ab + b^2) = 0$ wird, und folglich $(a + b) \times (a - b)$ die Factoren des obigen Productes sind.

Wenn

Wenn $(20a^5 - 16a^4b + 20a^3b^2 - 12a^2b^2) - (25a^4b - 20a^3b^2 + 25a^2b^3 - 15ab^3) + (10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^4)$ durch $5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^2$ zu theilen wäre, so wird man nach obigen Regeln, und den Gesetzen der Arithmetik, für den ersten Quotienten $4a^2$, diesen mit dem Divisor multiplicirt, und von dem ersten Producte abgezogen giebt Null zum Resultat, der Quotient des zweyten Products giebt $5ab$, welcher, da der Divisor mit den Gliedern des Products gleiche Zeichen hat, das Zeichen des zweyten Products haben muß, man hat also für die Quotienten der beyden Producte $4a^2 - 5ab$, da $5ab$ mit dem Divisor multiplicirt, und von dem 2ten Product abgezogen, ebenfalls gleich Null wird, nach eben diesen Gründen erhält man $2b^2$ zum dritten Quotienten, welcher mit den übrigen, durch das Zeichen der Addition verbunden werden muß, da nun dieser ebenfalls mit dem Divisor multiplicirt gleich null wird, so folgt daß obige Producte gleich $(5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^2) \times (4a^2 - 5ab + 2b^2)$ sind, die Theilung beruht also auf richtigen Gründen.

Zwey=

Zweyter Abschnitt.

Von den Brüchen.

1) Die algebraischen Brüche, sind wie die Brüche in den Zahlen, ausgedrückt; der Nenner von dem Zähler, durch einen Querstrich als Divisions-Zeichen, abgesondert.

2) Der Nenner eines Bruches er sey in Ziffern oder Buchstaben ausgedrückt, ist immer die Einheit, ist er in Ziffern ausgedrückt, so zeigt er überdieß in wie viel Theile selbe getheilt worden.

3) Ein Bruch kann der Einheit gleich, größer und kleiner als dieselbe seyn. Nur wenn der Zähler kleiner als der Nenner ist, kann die Größe eine eigentliche gebrochene Größe genennt werden.

4) Ein Bruch wird also seinen Werth nicht ändern, wenn man seinen Zähler, und Nenner mit einer nämlichen Zahl multiplicirt, oder dividirt, da hiedurch das Verhältniß, von dem Zähler zu dem Nenner nicht geändert wird.

Wenn man daher die Summe, die Differenz, das Product und den Quotienten zweyer Brüche verlangte, so würde man, wenn diese Brüche z. B. $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sind, dieselben zu erst gleichartig machen müssen, so daß also $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$, und $\frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$, die Summa dieser Brüche wird also $\frac{ad + bc}{bd}$, deren Differenz $\frac{ad - bc}{bd}$, deren Product $\frac{adbc}{bdbd} = \frac{ac}{bd}$, deren Quotus $\frac{\frac{ad}{bd}}{\frac{bc}{bd}} = \frac{ad}{bc}$.

5) Wenn man einen Bruch zu irgend einer Würde erheben soll, so verfahre man mit dem Zähler und Nenner, nach den gegebenen Regeln.

So wird z. B. $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$ und überhaupt $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

6) Um die $\sqrt[m]{\ }$ aus einem Bruche zu ziehen, ziehe man dieselbe aus dem Zähler und Nenner.

So wird $\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{a}{b}$ und folglich $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

Die

Die Theilung der Einheit, ist ein eigentlicher Bruch, die Theilung eines Bruches giebt den Bruch eines Bruches.

So wird $\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a^2}$ und das Viertel eines Viertes $\frac{1}{16}$ u. s. w.

Anmerkung. Wenn Brüche mit einander multiplicirt werden sollen, welche einerley Nenner haben, so dürfen die Nenner derselben nicht mit einander multiplicirt werden, so wie z. B. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$ und nicht $= \frac{ac}{b^2}$, denn wenn z. B. 16 L. mit 4 L. multiplicirt werden sollen, so würde man 64 L. = 2 Pf. haben, wenn man nun 16 und 4 wie $\frac{16}{32}$ und $\frac{4}{32}$ ausdrücken würde, so wäre $\frac{16 \times 4}{32} = \frac{64}{32} = 2$ Pf. das Resultat; man darf also nur gleiche Nenner der Brüche mit einander multipliciren, wenn dieselben erst unter einerley Benennung gebracht worden sind, weil dann in derselben Product, ohnehin schon das Product, des neuen Nenners enthalten ist. Oder wenn es die Aufgabe ausdrücklich erheischt. Es ist gewiß, daß dieser Fall im eigentlichen Verstande nicht vorkömmt, da hier immer einer der beyden Factoren oder $\frac{a}{b}$ oder $\frac{c}{b}$ als eine abstracte Größe, in aller andern Rücksicht, als ihre

Wirkung auf die andere, welche Vermehrung ist, betrachtet werden muß, da sie bis auf die Zahl ihrer Einheiten gleichartig sind, und Lothe mit Lothe multipliciren wollen, Unsinn seyn würde, so wie man nicht Wirkungen, wie + X +, — X — u. d. gl. multipliciren kann.

Ich habe daher diesen Fall algebraisch hieher gesetzt, um das allgemeine Gesetz anzuzeigen, wie Theile eines ganzen, als Brüche ausgedrückt, behandelt werden müssen. Eben so wird $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = \frac{q}{b}$ und $\frac{16}{32} : \frac{2}{32} = \frac{8}{32} = 8$ L.

Dritter Abschnitt.

Von der Erhebung gleichartiger Größen auf irgend eine Würde sowohl wenn selbe eintheilig, oder als wenn sie zusammengesetzt sind, nach der Newtonischen Formul.

1) Da es hinlänglich ist, daß man um gleichartige Exponential-Größen zu multipliciren, ihre Exponenten addire, so folgt, daß man um eine gegebene Größe auf irgend eine Würde zu erheben, den Exponenten dieser Größe, mit der Zahl welche den

den Grad anzeigt, auf den die gegebene Größe erhoben werden soll, multipliciren müße. Man nennt diese Zahl Exponent der Würde.

So wenn z. B. 4 dieser Exponent wäre, und a^3, die zu erhebende Größe, so würde $a^{3\times4} = a^{12}$ für das Resultat der 4ten Würde von a^3 erhalten. Eben so würde $a^2 b^3 c$, zur 4ten Würde erhoben $a^8 b^{12} c^4$ werden.

Es ist also $a^m b^n c^p$ auf die Würde r erhoben, gleich $a^{mr} b^{nr} c^{pr}$.

2) Aus allem was bisher gesagt worden, folgt, daß der Exponent einer jeden, zu irgend einer Würde erhobenen Größe, den Exponenten seiner Wurzel so oft enthalte, als Einheiten in dem Exponenten der zu behandelnden Größe enthalten sind. So ist z. B. der Exponent der vierten Würde einer Größe, der Exponent deren Wurzel multiplicirt mit vier.

3) Um also von irgend einer Exponential-Größe eine verlangte Wurzel auszuziehen, dividire man ihren Exponenten, durch die Zahl, welche den Grad von der Wurzel bezeichnet, welche man ausziehen will. Man nennt diese Zahl den Exponenten der Wurzel.

Wenn

Wenn man also die dritte Wurzel von a^9 ausziehen wollte, so würde man $a^{\frac{9}{3}} = a^3$ zum Resultat erhalten, eben so würde $\sqrt[3]{a^{12} b^6 c^3} = a^4 b^2 c$ seyn, und allgemein ausgedrückt $\sqrt[r]{a^m b^n} = a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}}$.

Diese Gesetze bleiben sich in jeder Rücksicht gleich. Die gegebenen Größen mögen, unter sich wirken wie sie wollen. So wird $(a^m) + (b^n)^r$ d. i. $a^m + b^n$ zur rten Würde erhoben $= a^{mr} + b^{nr}$, ferner $(a^m) - (b^n)^r = a^{mr} - b^{nr}$, $(a^m b^n)^r$ und $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^r = \frac{a^{mr}}{b^{nr}}$.

Eben so ist also $\sqrt[r]{(a^m + b^n)} = a^{\frac{m}{r}} + b^{\frac{n}{r}}$, $\sqrt{(a^m - b^n)} = \left(a^{\frac{m}{r}} - b^{\frac{n}{r}}\right)$, $\sqrt[r]{(a^m b^n)} = a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}}$, und endlich $\sqrt[r]{\left(\frac{a^m}{b^n}\right)} = \frac{a^{\frac{m}{r}}}{b^{\frac{n}{r}}}$.

4) Man kann aus obigen, also auf eine Art die Wurzel-Größen zu modificiren schließen, welche eine unmittelbare Folge desselben ist.

So wird z. B. $\sqrt[3]{a^4 b^5} = ab \sqrt[3]{ab^2}$ denn $\sqrt[3]{a^4 b^5} = a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{5}{3}} = a^{1+\frac{1}{3}} b^{1+\frac{2}{3}}$ nun ist $a^1 b^1 = ab$ und $a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{ab^2}$ folglich $\sqrt[3]{a^4 b^5} = ab \sqrt[3]{ab^2}$. Eben so wird $\sqrt[2]{\frac{a^3}{f}} = \sqrt{\frac{a^3}{f}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = a \frac{a^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = a \sqrt{\frac{a}{f}}$.

5) Wenn

5) Wenn die zu behandelnden Wurzel-Größen Coefficienten haben, so suche man dieselben in Factoren zu zerlegen, deren einer oder mehrere dieselbe, oder eine höhere Würde, der angezeigten Wurzel-Größe enthält, und man verfahre wie folgt: z. B. es ist $\sqrt{48\,a^2 b^3}$ gegeben, so setze man $48 = 3 . 16$ und man erhält $\sqrt{3 . 16 a^2 b^3} = 4\, a^{\frac{2}{2}}\, b^{\frac{2}{2}} . \sqrt{3} = 4\, ab \sqrt{3\,b}$. Eben so wird $\sqrt[3]{81\, a^5 b^4} = \sqrt[3]{3 \times 27\, a^5 b^4} = 3\, ab \sqrt[3]{3\, a^2 b}$.

6) Wenn die gegebene Wurzel-Größe zusammengesetzt ist, so muß man, da eine solche Reihe von Größen, nur Theile eines Ganzen, also nicht verschiedene ganze Größen ausdrückt, auch die vorkommenden Größen nicht einzeln, sondern im Ganzen nach obigen Gesetzen modificiren.

Es wird also z. B. $\sqrt[4]{a + b} = \overline{a + b}^{\frac{1}{4}}$ oder $(a + b)^{\frac{1}{4}}$. Wenn die gegebene Größe schon einen Exponenten hätte, wie $(a + b)^3$, und man hievon die 4te Wurzel bestimmen sollte, so würde man $\sqrt[4]{(a + b)^3} = (a + b)^{\frac{3}{4}}$ wie nach obigen Gesetzen erfolgen muß, erhalten.

7) Um Wurzel-Größen zu addiren, oder zu subtrahiren, addire oder subtrahire man sie, wenn

sie

sie gleichartig sind, und wenn sie ungleichartig sind, bemerke man diese Operationen, und setze diesen wirklichen, oder angezeigten Resultaten das Wurzel-Zeichen vor.

So wird z. B. $6\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a} = 8\sqrt[3]{a}$, und $8\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a} = 6\sqrt[3]{a}$. Eben so wird $\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b}$, die Summa dieser beyden Größen, und $\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{b}$ ihre Differenz ausdrücken, wenn $9a\sqrt[3]{b} - 7a\sqrt[3]{b}$ gegeben, so erhält man $2a\sqrt[3]{b}$ u. s. w.

8) Wenn man solche Größen mit einander multipliciren, oder durch einander theilen wollte, so verfahre man mit ihnen, wie gewöhnlich, und setze den Resultaten ihr Wurzel-Zeichen vor, welche daher gleichartig seyn müßen, weil sonst die Größen selbst ungleichartig seyn würden.

Es wird also z. B. $\sqrt[7]{a^5} \times \sqrt[7]{a^3} = \sqrt[7]{a^8} = \sqrt[7]{a^7 . a}$ $= a\sqrt[7]{a}$ eben so wird $\sqrt[5]{a^2 b^3} \times \sqrt[5]{a^3 b^2} = \sqrt[5]{a^5 b^5} = ab$; und $a \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{\frac{a^5 b}{a}} = \sqrt[5]{a^4 b}$. Wenn man nun diese Größen dividirt, so erhält man $\sqrt{a^5} : \sqrt{a^3} = \sqrt{a^{5-3}} = \sqrt{a^2}$. Eben so wird

$$\frac{\sqrt[5]{a^4 b^3}}{\sqrt[5]{a^2 b}} = \sqrt[5]{a^2 b^2},\ \frac{a}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{a^2};\ \text{und}$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^2}}{a} = \frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{a^5}} = \frac{\sqrt[5]{a^2}}{a^3} = \sqrt[5]{\frac{1}{a^2}} =.$$

NB. Indem man die Größen, welche zu theilen sind, durch diese Operation gleichartig gemacht hat, denn es ist klar, daß $\sqrt[5]{a^5} = a$.

9) Wenn eine Wurzel-Größe zu einer Würde erhoben werden soll, deren Exponent jenem der Wurzel-Größe gleich ist, so nehme man das Wurzel-Zeichen weg; es wird also $(\sqrt[5]{a}) = a$; dieses ist keiner Einwendung unterworfen, da die Aufgabe erheischt, die Größe auf ihren vorigen Zustande zurück zu führen.

10) Um eine Wurzel-Größe zu irgend einer Würde zu erheben, erhebe man dieselbe auf die angezeigte Würde, und setze dem Resultat das Wurzel-Zeichen vor.

So wird z. B. $\sqrt[7]{a^2}$ auf die 4te Würde erhoben, gleich $\sqrt[7]{a^8} = a\sqrt[7]{a}$, und folglich $\sqrt[7]{a^2 b^3} = \sqrt[7]{a^8 b^{12}}$ $= ab\sqrt[7]{ab^5}$ da nun $\sqrt[7]{a^2 b^3} = a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}$ so wird diese Größe zur 4ten Würde erhoben $= a^{\frac{8}{7}} b^{\frac{12}{7}} = ab\sqrt[7]{ab^5}$.

11) Um die Wurzel aus einer Wurzel-Größe zu ziehen, multiplicire man den Exponenten des Wurzel-Zeichens, mit jenen der auszuziehenden Wurzel.

Es wird also die 3te Wurzel von $\sqrt[5]{a^4} = \sqrt[15]{a^4} = a^{\frac{4}{15}}$.

12) Wenn die gegebenen Wurzel-Größen nicht alle die nämlicheu Exponenteu haben, die nicht von gleichem Grade sind, so bringe man sie unter einerley Benennung. Wenn daher nur zwey Wurzel-Größen gegeben sind, so multiplicire man die Exponenten der Wurzel-Zeichen, welches Resultat den neuen Exponenten dieses Wurzel-Zeichens giebt, und verfahre eben so mit dem Exponenten einer jeden Größe, welche unter dem Wurzel-Zeichen steht, in dem man ihn durch den Exponenten des Wurzel-Zeichens der andern Größe multiplicirt, und vice versa.

So wird $\sqrt[5]{a^3}$ und $\sqrt[7]{a^4} = \sqrt[35]{a^{21}}$ und $\sqrt[35]{a^{20}}$, folglich deren Summa $\sqrt[35]{a^{21}} + \sqrt[35]{a^{20}}$e Differenz $\sqrt[35]{e^{21}} - \sqrt[35]{a^{20}}$. Product $\sqrt[38]{a^{21+20}}$ und Quotus $\sqrt[35]{a^{21-20}}$

13) Wenn

13) Wenn mehrere Wurzel-Größen gegeben sind, welche man unter einerley Nenner bringen soll, so multiplicire man alle Exponenten der Wurzel-Zeichen miteinander, und jene unter einem Wurzel-Zeichen stehende Größen, durch das Product der Exponenten aller Wurzel-Größen, weniger jenem unter welchem die Größe steht, und so verfahre man mit allen.

So wird $\sqrt[5]{a^2}$, $\sqrt[7]{a^2}$ und $\sqrt[8]{a^7} = \sqrt[5\cdot7\cdot8]{{}^{3\cdot7\cdot8}}$, $\sqrt[5\cdot7\cdot8]{a^{2\cdot5\cdot8}}$, und $\sqrt[5\cdot7\cdot8]{a^{7\cdot5\cdot7}}$ folglich $\sqrt[280]{a^{168}}$, $\sqrt[280]{a^{80}}$ und $\sqrt[280]{{}^{245}}$ mit welchen man nun wie mit obigen eine jede Operation vornehmen kann.

14) Der Grund hievon liegt darinn, daß, da jede Größe schon durch das neue Product des Exponenten des Wurzel-Zeichen, und das Product der übrigen in ihrer Würde geschwächt wird, dieselbe, um dasselbe Product nach der Art, des Exponenten ihres Wurzel-Zeichens verstärkt werden muß, auf daß dasselbe Verhältniß zwischen ihnen herrsche.

15) Aus diesem also kann man folgern, daß, wenn man gleiche Factoren, welche sich in den Wurzel-Zeichen, und ihrer untergeordneten Größen befinden, unterdrückt, der Werth des Ganzen sich immer gleich bleibe.

So

So wird $\sqrt[5\cdot7\cdot8]{a^{3\cdot7\cdot8}} = \sqrt[5]{a^3}$ u. d. gl.

16) Wenn man daher aus einer Exponential-Größe die Wurzel ausziehen wollte, so verfahre man mit dem Exponenten auf dieselbe Art.

Es sey z. B. $\sqrt[6]{a^{24}}$ gegeben, so erhält man da $\sqrt[6]{a^{24}} = \sqrt[6]{a^{6\cdot4}} = a^4$. Eben so ist $\sqrt[6]{a^{12} b^{36}} = \sqrt[6]{a^{6\cdot2} b^{6\cdot6}} = a^2 b^5$.

17) Da nun in $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$ u. d. gl. die letztern Ausdrücke bequemer sind, als die erstern, so bemerke man noch folgendes, daß überhaupt $\sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}} = a^{\frac{n}{m}+} \times b^{\frac{p}{m}+\frac{}{q}}$ nun dieses Resultat unter einen Nenner gebracht, giebt $a^{\frac{qn+mr}{qm}} b^{\frac{pq+sm}{qm}} = \sqrt[qm]{a^{qn+mr} b^{pq+ms}}$ eben so wird $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$ in $a^{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}} = a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}$ verwandelt, u. d. gl.

18) In Betreff der Erhebung mehrtheiligen Größen bemerke man folgendes:

Daß man nach dem Gesetze eine Größe zu ihrer mte Würde zu erheben, diese Größe durch die Zahl ihrer Einheiten wiederholen müße, und jedes dieser Producte, so oft auf die nämliche Art wiederholt werden muß, als der Exponent Einheiten enthält, da nun die Größe schon ihre erste Würde enthält, so folgt, daß, wenn m der Exponent ist, diese Wiederholung m — 1 mal geschieht.

Da aber diese Operation sehr langweilig wird, wenn m mehrere Einheiten enthält, so hat man auf Mittel gedacht, dieselben zu verkürzen.

Es sey daher $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$ ꝛc. verschiedene Größen, welche alle die Größe x gemein haben, und welche man mit einander multipliciren soll.

So wird $x + a$

$$x + b$$

$$\overline{x^2 + ax + bx + ab}$$

$$x + c$$

$$\overline{(x^3 + ax^2 + bx^2 + abx) + cx^2 +}$$

$$x + d$$

$$(acx + bcx + abc) = x^4 + ax^3 + bx^2$$

$$x + d$$

$$+ cx^3 + acx^2 + bcx^2 + abcx + x^3d + adx^2$$

$$+ bdx^2 + abdx + cdx^2 + acdx + bcdx + abcd.$$

Es wird also

$$
\begin{array}{l}
x + a \\
x + b \\
\hline
x^2 + ax
\end{array}
$$

Der gewönliche Weg die binomial Formel zu finden. Hier haben sich Fehler einge schlichen welche leicht verbessert werden können

$$
\begin{aligned}
& + bx + ab \times x + c = x^8 + ax^2 + abx + abc \times x + d \\
& \qquad\qquad\qquad\quad + bx^2 + acx \\
& \qquad\qquad\qquad\quad + cx^2 + bcx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{wird } & x^3 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd \\
& + bx^\varepsilon + acx^2 + abdx \\
& + cx^3 + adx^2 + acdx \\
& + dx^3 + bcx^2 + bcdx \\
& \qquad\quad + bdx^2 \\
& \qquad\quad + cdx^2
\end{aligned}
$$

Dieses Resultat führt uns auf folgende Schlüße:
1) Das erste Glied eines solchen Products ist x, welches zu einer Würde erhoben worden, welche der Größe zur gegebenen Würde erhoben, gleich ist.

2) Die Exponenten von x nehmen immer um die Einheit ab, bis kein x mehr vorhanden ist.

3) Die Coefficienten, oder Multiplicatoren der Glieder, sind für das 3te Glied, die Summa der Producte von a, b, c &c. jedesmal zwey mit einander multiplicirt. Für das 4te Glied, die Summa der Producte dieser Größen, jedesmal drey mit drey multiplicirt, u. s. w.

Wenn

Wenn man nun $a = b$, $a = c$, $a = d$, setzt, so werden obige Producte, da $x + b = x + a$, und $x + c = x + a$ u. s. w.

$$x + a$$
$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 = (x + a) \times (x + b).$$
$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3 = (x + a) \times (x + b) \times (x + c).$$
$$x^4 + 4ax^3 + ba^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x + a)^4 = (x + a) \times (x + b) \times (x + c) \times (x + d).$$

Aus diesen Producten sieht man ferner, daß die Exponenten von x, nach (2), x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, seyn werden, folglich nach obigen Gesetze abnehmen.

Aber nicht so leicht erkennt man das Gesetz nach welchen die Coefficienten geordnet sind, und wie, und warum sie von den Exponenten abhängen.

Zu diesem Ende wollen wir die letzteren der obigen Producte wieder vornehmen, und bemerken, daß der Coefficient des zweyten Gliedes, die Summa aller Buchstaben a, b, c, d, welche nun, ein jedes für sich gleich a gesetzt worden, seye. Wenn daher die Zahl dieser Buchstaben m ist, so ist dieser Coefficient m mal $a = ma$, d. i. der Coefficient des 2ten Gliedes ist gleich dem Exponenten des ersten.

Um

Um nun die Coefficienten der übrigen Glieder zu finden, bemerke man, daß die Producte ad, bc, ac, ad, bd &c. in obigem Falle a^2 werden, eben so werden die Producte abc, abd &c. a^3, und so die andern verhältnißmäßig. Es ist folglich der Coefficient des dritten Gliedes a^2 so oft genommen, als die Buchstaben a, b, c, d, jedesmal zwey mit einander multiplicirt, Producte geben. Deßgleichen wird der Coefficient des vierten Gliedes a^3 so oft enthalten, als, eben diese Buchstaben, jedesmal drey miteinander multipliciet, Producte geben, und so die bürigen. Um nun die Coefficienten des 3ten, 4ten, m^{ten} Gliedes, der m^{te} Würde, einer zweytheiligen Größe z. B. $\overline{x+a}$, in Zahlen zu haben, suche man zu bestimmen, wie viel eine Zahl m von Buchstaben a, b, c &c. Producte jedesmal zwey, drey miteinander multiplicirt, geben könne.

Wenn man nun eine Zahl m von Buchstaben hat, und diesen auf alle mögliche Art, zwey, drey, u. s. w. miteinander multiplicirt, so bemerke man

1tens. Daß man halb so viele Producte erhalten wird, als Zusammensetzungen von Buchstaben, zwey und zwey miteinander statt haben, so giebt z. B. a und b, ab und ba, welche aber nur ein einziges Product ausmachen.

2tens.

2tens. Daß die Zusammensetzung von zwey Buchstaben als a, b, c, ohne daß einer derselben zweymal in einer solchen Zusammensetzung gebraucht wird, auf sechs verschiedene Arten geschehen, deren Werthe (Product) einander gleich sind, als z. B. abc, acb, bac, bca, cab, cba, die Producte von einer solchen Zusammensetzung von 3 Buchstaben sind also deren 6ter Theil.

3tens. Nach eben diesen folgt, daß die Zusammensetzung von 4 Buchstaben, nach diesen Gesetzen, auf 24 verschiedene Arten geschehen könne, welche alle einen gleichen Werth unter sich haben, dieser Werth, oder Product ist also derselben 24te Theil. Aus diesem folgt nun, daß das Product einer Zahl m, solcher zusammengesetzter Buchstaben, immer derselben mte Theil sey.

Da nun in Betreff solcher Verbindungen z. B. von zwey Buchstaben miteinander, nur m — 1 solcher Buchstaben zusammengesetzt werden können, da keiner derselben zweymal in einer solchen Zusammensetzung vorkommen darf, so wird die Zahl aller Verbindungen auf diese Art m . m — 1 seyn, die Zahl derselben Product ist also $m \cdot \frac{m-1}{2} = 1$.

$mAQ = B$ und folglich $\frac{m-1}{2} . mAQ \times Q = \frac{m-1}{2} BQ.$ Eben so kann man $\frac{m-1}{2} BQ = C$ setzen, wo $m \times \frac{(m-1)}{2} \times \frac{(m-2)}{3} AQ^3 = (\frac{m-2}{3}) \times (\frac{m \times m-1}{2}) AQ^2.Q,$ d. i. $(\frac{m-2}{3}) \times (\frac{m-1}{2}) BQ. Q.$ Auf diese Art verfahre man nun mit den noch übrigen Gliedern, wenn es nöthig ist, und man erhält für obige Formul $(x+a)^m = x^m$ oder $A + mAQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ$ &c.

Wenn man eine drey- bis m theilige Größe zu der mten Würde zu erheben hätte, so setze man das erste Glied gleich x in der Formul, und die übrigen Glieder gleich irgend einem andern Buchstaben, dessen Werth man nach geendeter Operation wieder substituirt.

19) Aus dem, was in der Division gesagt worden, weiß man, wie man sich zu verhalten hat, um von der mte Würde einer mehrtheiligen Größe wieder auf dieselbe zurück zu kommen, wäre nun eine Größe gegeben, deren Exponenten anzeigen, daß sie etwas mehr als die mte Würde enthält, welches man durch das Abziehen derselben von der gegebenen Größe findet, so würde sich dieser Rest unter dem Wurzel-Zeichen befinden, von welchen man die Wurzel durch Annäherung, wie in der Arithme-

tik

tik, mittels der Dezimalen eben so in der Algebra, mittels obiger Formul finden kann. Es sey ein solcher Rest $(a+b)^m$ unter dem Wurzel-Zeichen $\sqrt[n]{}$, so wird $\sqrt[n]{(a+b)^m} = \overline{a+b}^{\frac{m}{n}}$. Es wird folglich $(a+b)^m$ sich zu $x^m + \frac{mx^m a}{x}$ ꝛc. verhalten, wie $\overline{a+b}^{\frac{m}{n}}$ sich zu $x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}} a$ ꝛc. verhält, man darf also nur in der Formel $x^m + \frac{mx^m a}{x}$, anstatt m, $\frac{m}{n}$ setzen, so wird man aus derselben den Werth von $\overline{a+b}^{\frac{m}{n}}$ bestimmen. Die Formul wird folglich

$$(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}} a}{x} + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1}{2} \frac{x^{\frac{m}{n}} a^2}{x^2}$$

$$+ \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1 \cdot \frac{m}{n} - 2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{x^{\frac{m}{n}} a^3}{x^2} \text{ ꝛc.}$$

Beyspiele der Anwendung dieser Formul.

Es sey $x+a$ zur 7ten Würde zu erheben, es wird folglich die gegebene Formul

$$x^7 + \frac{7x^7 a}{x} + \frac{7 \cdot 7 - 1}{2} \frac{x^7 a^2}{x^2} + \frac{7 \cdot 7 - 1 \cdot 7 - 2}{2 \cdot 3} \frac{x^7 a^3}{x^3}$$

$$+ \frac{7 \cdot 7 - 1 \cdot 7 - 2 \cdot 7 - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^7 a^4}{x} + \frac{7 \cdot 7 - 1 \cdot 7 - 2 \cdot 7 - 3 \cdot 7 - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{x^7 a^5}{x^5}$$

$$+ \frac{7 \cdot 7-1 \cdot 7-2 \cdot 7-3 \cdot 7-4 \cdot 7-5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \frac{x^7 a^6}{x^6} + \frac{7 \cdot 7-1 \cdot 7-2 \cdot 7-3 \cdot 7-4 \cdot 7-5 \cdot 7-6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{x^7 a^7}{x^7} =$$

$x^7 + 7ax^6 + 21 a^2x^5 + 35 a^3x^4 + 35 a^4x^3 + 21 a^5x^2 + 7 a^6x + a^7$. Eben so würde $(x^3 + a^3)^6$ nach den ersten Gliedern der allgemeinen Formul

$$x^{18} + \frac{6a^3 x^{18}}{x^3} + \frac{15a^6 x^{18}}{x^6} + \frac{20a^9 x^{18}}{x^9} + \frac{15 a^{12}x^{18}}{x^{12}} + \frac{6 a^{15} x^{18}}{x^{15}} + \frac{a^{18} x^{18}}{x^{18}} =$$

$x^{18} + 6a^3 x^{15} + 15 a^6 x^{12} + 20 a^9 x^9 + 15 a^{12} x^6 + 6 a^{15} x^3 + a^{18}$. Wenn man ferner die zweyte Wurzel von $a + b$ bestimmen wollte, so würde man, da $\sqrt{a+b} = \overline{a+b}^{\frac{1}{2}}$, in der allgemeinen Formul $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ setzen, wenn nun überdieß z. B. $a = 8$, $b = 4$, so würde man für die Formul

$$2,82 + \frac{\frac{1}{2} 2,82,4}{8} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 1}{2} \cdot \frac{2,82.16}{64} \text{ ꝛc.} =$$

$2,82 + \frac{11,28}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{45,22}{64}$ ꝛc. $= 2,82 + 0,75 + 0,08 - 0,18 = 3,65 - 3,28 = 3,47$ und folglich $(3,47)^2 = 11,9409$. Eben so würde, wenn $a = 144$, $b = 6$ wäre, die allgemeine Formul $= 12 + \frac{6 . 6}{144} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}, \frac{36}{20736}$ ꝛc. $= 12 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{96} = 12 + 0,25 + 0,01 - 0,02 = 12,26$

$-0{,}02 = 12{,}24$ werden, und folglich $(12{,}24)^2 = 149{,}7076$. Daß nach eben dieser Formul alle Größen mit gebrochenen Exponenten behandelt werden können, ist vor sich klar.

Vierter Abschnitt.

Von dem Transpositions- und Reductions-Gesetz.

1) Wenn $a - b - c$ gegeben, so ist gewiß, daß um so viel die Größe b vermindert wird, die Größe a vermehrt werde. Um dieses zu erläutern, sey $a = 8$, $b = 6$, $c = 4$, so wird $8 - 6 - 4 = 8 - 2 = 6 = 8 + 4 - 6 = 6$, wollte man nun ohne eine ungegründete Veränderung der Zeichen vorzunehmen, gleiche Zeichen addiren, so würde man $8 - 10 = 2$, oder nach den allgemeinen Grundsätzen -2 erhalten, welches offenbar falsch ist. Eben so würde, wenn $a - p = d$ gegeben, in dem Falle, daß $a = 12$, $p = 6$, $12 - 6 = 6$, setzt man nun $p = b + c$ und $b = 4$, $c = 2$, so erhält man $a - p = a - b + c = d$, und $12 - 6 = 12 - 4 + 2 = 6$, nach der allgemeinen Methode aber würde

de man $-p = -b-c$ setzen müssen, welches nicht ist, da das Zeichen $(-)$ nicht zu p noch zu a gehört, sondern nur anzeigt, wie diese beyden Grössen aufeinander wirken, oder die Addition gleicher Zeichen giebt ein falsches Product.

Wenn man nun, wenn $a-b-c$ gegeben, die Größe c transponiren wollte, so würde man $a+c-b$ erhalten, da die Größe a durch die Verminderung von b, um c, ebensowohl um c wächst, als wenn $a+c-b$ gegeben wäre, da nun $a-b-c = a+c-b$, so folgt, daß $a-b+c$ nicht gleich $a+c-b$ sey.

Eben so verhält es sich, wenn z. B. $(a^2+ab-cd)$ $+(ab+b^2-ef)-(cd+ef-m)$ gegeben würde, wollte man nun das in diesen Größen gegebene Quadrat von $a+b$ zusammen setzen, so würde man $a^2+2ab+b^2$, da nun cd eben so wohl in der ersten als in den dritten dieser gegebenen Größen abgezogen werden soll, und das erste und zweyte Glied dieser zusammengesetzten Größen ein Ganzes ausmachen, wodurch allein die Zusammensetzung von des erstern Quadrats legitimirt werden kann, so verhält sich dieses eben so mit den beyden Größen cd, und man erhält folglich $a^2+2ab+b^2-2cd$, da nun dieses Ganze durch ef vermindert werden

soll,

soll, und auch das dritte Glied eine abermalige Verminderung dieser Größe um $f - m$ anzeigt, so folgt, daß $(a^2 + ab - cd) + (ab + b^2 - ef) - (cd + ef - m) = (a^2 + 2ab + b^2 - 2cd - 2ef - m)$ wird.

Eben so verhält es sich, wenn $(a - b) - (b + c)$ gegeben wäre, wo die Größe b, mehr dieselbe Größe, mehr c von a abgezogen werden soll, man könnte also auch hier $(a - b) - (b + c) = a - 2b + c$ setzen. Jedoch findet dieses nicht statt, wenn z. B. $(a - b) - (c - d) - (b + m)$ gegeben wäre, da in diesem Falle $(b + m)$ auf $(a - b)$ vermehrend wirkt, und folglich $(a - b) - (c - d) - (b + m) = (a - b) + (b + m) - (c - d) = a + m - c - d = a + m + d - c$.

Um sich von der Wahrheit dieser Sätze zu überzeugen, setze man $a = 100$, $b = 10$, $c = 40$, $d = 20$, $m = 5$, es ist also $(a - b) - (c - d) - (b + m) = (100 - 10) - (40 - 20) - (10 + 5) = (100 - 10) + (10 + 5) - (40 - 20)$; da nun der erste Ausdruck dieser Reihe von Größen gleich $(90) - (20) - (15)$ und folglich $= 85$, der zweyte aber $= (90) + (15) - (20) = 85$, und endlich $= 100 + 5 + 20 - 40$, d. i. $= 85 = a + m + d - c$,

so folgt, daß $(a-b)-(c-d)-(b+m) = a+m+d-c$ sey. Man kann also gleiche Größen gleich null setzen, wenn sie eine gegebene Größe zugleich um sich selbst vermehren, und vermindern, wie wir in dem Falle $(a-b)+(b+m)$ gesehen haben, welcher $= a+m$ gesetzt worden.

Eben so verhält es sich, wenn z. B. $(a+b) - (b+c)$ gegeben wäre, wo man $a-c$ für den gegebenen Werth dieser Größen erhält. Diese und die hieraus resultirenden Gesetze sind es also, an welche man sich bey Transponirung, und Reducirung von Größen zu halten hat, und woraus man vermuthlich den irrigen Satz, daß man gleich bezeichnete Größen addiren müsse, gefolgert hat.

So kann man auch in Rücksicht der Multiplication, und Division Transpositionen vornehmen, so ist z. B. wenn man $ma = b$ hätte, $a = \frac{b}{m}$ so daß also, wenn $m = 6$, $a = 4$, folglich $6 . 4 = 24$, $4 = \frac{24}{6}$ d. i. $4 = 4$. Eben so ist $\frac{b}{a} = m$, folglich $\frac{24}{4} = 6$ und $b = am$ $24 = 4 . 6$. Wie wir in den Formuln der Multiplication, und Division schon gesehen haben.

Eben

Eben dieses bleibt auch von zusammengesetzten Größen wahr. So wird $\frac{a+b}{c-d} = m = a + b = m \times c - d$ und folglich $a = m \times (c - d) - b$, und $\frac{a+b}{c-d} = m$, d. i. wenn man zwey gleiche Größen gleich modificirt, so bleiben sie sich gleich.

Eben so wird $\frac{a^2}{a^2 - x^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}$ denn da die Größe $\frac{a^2}{a^2 - x^2}$ nothwendig größer als die Einheit ist, und dieses um so viel als x^2 gleich ist, so folgt daß da $\frac{a^2 - x^2}{a^2 - x^2} = 1$ noch ein Rest übrig bleiben muß, der $\frac{x^2}{a^2 - x^2}$ ist, es ist folglich $\frac{a^2}{a^2 - x^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}$.

Man hat auch angenommen, daß, das Zeichen (—) das Entgegengesetzte einer Operation anzeigen könne, so das man z. B. statt $\frac{1}{a^3}$ z. B. $1 \times a^{-3}$ setzen kann, und anstatt $\frac{a+b}{c-d} = \overline{b+a} \times \overline{c-d}^{-1}$.

Ich

Ich bemerke dieses nur, daß man nicht in den Irrthum verfalle, als wollte dieses sagen, eine Größe auf eine ihr entgegengesetzte Würde erheben, sondern, daß man das Entgegensetzte desjenigen, was das Operations-Zeichen, welches vor der Größe steht, mit derselben vornehmen müsse. Eben so verhält es sich, wenn man von einem Ganzen einen Theil transponiren wollte, derselbe also immer nur vermehrend auf dasselbe wirken muß; so wird $a + bx$, wenn man x transponiren wollte $x = \frac{a}{-b}$, wo das Zeichen (—) anzeigt, daß b die Größe a verhältnißmäßig vermehren müsse, durch daß, das es jeden andern Theiler vermindere. Auf dieses gründet sich der Ausdruck $1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$. Dieser Fall kann die vermehrende Theilung, wie der Ausdruck $\frac{1}{a^3} = 1 \cdot a^{-3}$ eine vermindernde Vervielfältigung genannt werden. Aber auch hier sieht man, daß diese Zeichen nicht zu den Größen gehören, sondern ihre Wirkung aufeinander anzeigen, und daß folglich eine Größe nach allen Gesetzen modificirt werden könne, daß ist, allen Wirkungen unterworfen ist, welche das Verhältniß anderer Größen zu ihr bestimmen.

Der

Der Bruch $\frac{a^2}{a^2 + x^2}$ kann also auch wie $1 - \frac{x^2}{x^2 + x^2}$ ausgedrückt werden. Denn es ist gewiß, daß $\frac{a^2 + x^2}{a^2 + x^2} = 1$ folglich fehlt noch $\frac{x^2}{a^2 + x^2}$ daß der Bruch der Einheit gleich werde, es ist also $\frac{a^2}{a^2 + x^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2 + x^2}$, wie nützlich diese Veränderung derley Ausdrücke sey, werden wir in der Folge zeigen.

Noch bemerke man, daß von allen, was bisher vorgetragen worden, alles in Rücksicht der Resultaten, im strengsten Verstande, mit demjenigen übereinstimmt, was nach der allgemeinen Methode gefunden wird, nur mit dem Unterschied, daß nach der meinigen, auch der Gang der Operationen auf geometrische Evidenz gebaut, meistens kürzer, immer faßlicher ist.

äußern Glieder gleich dem doppelten eines der mittlern Glieder, d. i. $a + c = 2b$.

7) Um das mittlere arithmetische Proportional-Glied zwischen zweyen Größen zu finden, wird, wenn dieses durch c ausgedrückt wird $a : x : : x : b$, und folglich $a + b = 2x$ und

$$x = \frac{a + b}{2}.$$

8) Wenn man das erste Glied eines arithmetischen Verhältnisses fortsetzt, so wie $a : a \mp d : a \mp 2d : a \mp 3d : a \mp 4d$ u. s. w. so heißt dieses, wenn d wie immer Differenz bezeichnet, eine arithmetische Reihe.

9) In jeder arithmetischen Reihe ist die Summa der Glieder, welche von dem mittleren gleich weit abstehen, der Summa derselben gleich, wenn die Zahl derselben eine gerade Zahl ist, ist sie eine ungerade, so sind sie dem doppelten des mittleren gleich. So ist in $a : a \mp d : a \mp 2d : a \mp 3d : a \mp 4d : a \mp 5d$, die Summa der mittleren Glieder $a \mp 2d + a \mp 3d = 2a \mp 5d$, und die Summa der äußern $a + a \mp 5d = 2a \mp 5d$.

10) Man

10) Man wird also in einer jeden arithmetischen Progreſſion ein unbekanntes Glied, welches es auch sey, finden können, wenn man das erste Glied, die Differenz, und die Zahl der Glieder kennt. Denn man sieht aus der Formul, daß von dem ersten Gliede, und von den Product der allgemeinen Differenz mit der Zahl der vorhergehenden Glieder, weniger dem ersten, welches schon bestimmt ist, auch dieses Glied bestimmt werden müsse; wenn wir daher dasselbe w nennen, so wird $w = a \mp d(n - 1)$.

11) Die Summa aller Glieder einer arithmetischen Proportion ist gleich dem Product der Summa der äußern Glieder, mit der Hälfte der Zahl der Glieder.

Da nun die Summa der äußern Glieder, $a + w$ ist, so ist die Summa aller Glieder $S = (a + w)\frac{n}{2}$ $= \frac{an + wn}{2}$.

12) Wenn zwey Glieder einer solchen Reihe gegeben sind, und man eine Zahl m von Gliedern zwischen selben einschalten wollte, so würde da $w = a + d(n - 1)$ folglich $w - a = d(n - 1)$ und in diesem Falle $n = m + 2$ ist, $\frac{w - a}{m + 1} = d$ seyn.

13) Aus obigen sieht man ferner, daß Progressionen nichts als Reihen fortgesetzter Verhältnisse sind, welche entweder immer wachsen, oder immer abnehmen, wie es die Formul $\div$ a ; a $\pm$ d : a $\pm$ 2 d : a $\pm$ 3 d u. s. w. ausdrückt.

Anmerkung. Da hier von dem Verhältniß der Größen gehandelt worden, welches dieselben nach ihren Wirkungen aufeinander haben, so folgt, daß aus denselben ihr Verhältniß gegeneinander resultire, es ist also gewiß, daß nicht die Wirkungen oder deren Bezeichnung in Verhältnisse gebracht werden können, sondern deren Resultate: so heißt: $(a+b) : (c+d) :: (e+f) : (m+n)$, oder $(a-b) : (c-d) :: (e-f) : (m-n)$, ein zusammengesetztes Verhältniß von vier zweytheiligen Größen, sowohl in Rücksicht der Summa, als der Differenz ihrer Glieder; ein Verhältniß wie $+a : +b :: +c : +d$, oder $-a : +b :: +b : -c$ u. d. gl. ist, da kein Gegenstand da ist, auf welchen diese Größen wirken könnten; und Wirkung ohne Ursache unmöglich ist, eine bezeichnete Ungereimtheit.

Von

Von dem geometrischen Verhältniß.

1) Die Vergleichung, welche man mit zweyen Größen, in Rücksicht ihres Quotienten macht, heißt ein geometrisches Verhältniß.

2) Wenn man zwey solche Verhältnisse miteinander vergleicht, so heißt dieses ein zusammengesetztes Verhältniß. Es ist daher $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ der allgemeine Ausdruck eines geometrischen Verhältnisses, da nun in diesem Falle immer $ad = bc$; so ist

3) das allgemeine Gesetz eines geometrischen Verhältnisses, daß in denselben das Product der äußern Glieder gleich dem Product der mittlern ist. Und daß folglich der Quotient des ersten Gliedes, in dem zweyten, oder des zweyten in dem ersten, jenen des dritten in dem vierten, oder umgekehrt, gleich ist. Man benennt ein solches Verhältniß, wie das arithmetische, und bezeichnet es, wie $a : b = c : d$, auf diesen folgt nun, daß, wenn q diesen Quotienten vorstellt $a : aq = c : cq$ das Gesetz eines solchen Verhältnißes ausdrückt.

4) Aus diesen sieht man ferner, daß es leicht seyn wird, wenn drey Glieder einer geometrischen

 Pro-

Proportion gegeben sind, das vierte zu finden, denn es wird $a : b = c : x$ folglich $ax = bc$ und $x = \frac{bc}{a}$ wenn dieses Glied eines der mittleren ist, so wird $a : b = x : c$, $ac = bx$ und $x = \frac{ac}{b}$.

5) Wenn ein Verhältniß, wie $a : b = b : c$ gegeben ist, so heißt dieses ein fortgesetztes geometrisches Verhältniß, und in demselben ist das Product der äußern Glieder gleich dem Quadrat des mittlern. D. i. $ac = b^2$.

6) Man kann also die Glieder einer geometrischen Proportion versetzen, wie man will, so lange die Producte der äußern, den Producten der mittlern gleich bleiben.

7) Nun wollen wir den allgemeinen Ausdruck der geometrischen Progressionen suchen, sie sind eine Reihe von Gliedern, welche, das erste und das letzte Glied ausgenommen, alle Antecedenten und Consequenten einer Reihe sind, welche in einen gleichen Verhältniß unter sich stehen, welches ihr Quotient anzeigt. Die folgende Formul kann also eine geometrisch Reihe ausdrücken:

$$\div\!\div\; a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 \ldots\ldots aq^n.$$

8) In

8) In dieser Formul sieht man ferner, daß sich das erste Glied, zum dritten, wie das Quadrat des ersten Gliedes zum Quadrat des zweyten verhalte, d. i. $a : aq^2 = a^2 : a^2q^2$, und überhaupt zwey Glieder einer Reihe verhalten sich gegeneinander, wie das erste zum zweyten zu einer Würde erhoben, deren Exponent der Entfernung der gegebenen Glieder gleich ist.

9) Aus dieser nämlichen Formul sieht man ferner, daß, was immer für ein Glied, dem Producte des ersten Gliedes, multiplicirt mit dem Quotienten zu einer Würde erhoben, welcher der Zahl der vorhergehenden Glieder, weniger 1 ist, gleich ist.

Wenn folglich w dieses Glied, und n die Zahl der Glieder ist, so wird $w = aq^{n-1}$.

10) Es sey ferner s die Summa der Glieder einer geometrischen Reihe, von welcher man das erste Glied, und das letzte kennt, und q deren Quotient so wird $s - w$, die Summa aller Antecedenten seyn, eben so ist die Summa aller Consequenten $s - a$. Da nun in einer geometrischen Reihe sich die Summa aller Antecedenten zu der Summa aller

Con-

Consequenten, wie ein Antecedent zu seinem Consequent verhält, so ist

$$s - w : s - a = a : aq = s = \frac{wq - a}{q - 1}.$$

11) Man bemerke endlich, das eine geometrische Reihe, wie obige, $= a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 : aq^7$ &c. mit einer arithmetischen verbunden sey, welche die Exponenten von q bilden. Diese Verbindung ist die Grundlage der so nützlichen als allgemein bekannten Logarithmen.

Etwas von den unendlichen Reihen.

1) Wie man überhaupt im allgemeinen einen Gegenstand unendlich nennt, dessen Gränze nicht bekannt, oder bestimmt ist, so heißen auch in der Algebra unendliche Reihen, jene, welche man so lange fortsetzen kann, als man will, so wie z. B. die Dezimal-Brüche der Arithmetik.

2) Eine solche Reihe ist entweder eine arithmetische oder eine geometrische Progression abnehmend, oder zunehmend. Aus obigen haben wir gesehen, daß es unendliche Reihen gebe, deren

Glie-

Glieder durch das Additions - Zeichen, und solche, deren Glieder durch das Subtractions - Zeichen verbunden sind. So wird z. B. eine derley Reihe durch die Auflösung eines Bruches summarische Zeichen haben, wenn dessen Nenner eine zweytheilige Größe ist, welche eine Differenz anzeigt, da, das Product des zweyten Divisors mit dem Quotienten. von dem Product des ersten Divisors mit demselben Quotienten abgezogen werden muß, dieses letztere aber ist dem Dividendo gleich, folglich herrscht eine das Dividendum vermehrende Ursache, durch die Subtraction des zweyten dieser Producte, welches der Grund des summarischen Zeichens der Reihe ist.

3) Eben so verhält es sich, wenn der Nenner des Bruches eine zweytheilige Größe ist, welche eine Summa anzeigt, da in diesem Falle das Product des Quotienten immer um die Summa des Products des zweyten Theils des Divisors zu stark wird, es herrscht folglich immer eine das Dividendum vermindernde Ursache, welche sich in dem Quotienten äußern muß, die Auflösung eines solchen Bruches in eine unendliche Reihe giebt also eine geometrische abnehmende Reihe, deren Glieder durch das Subtractions - Zeichen verbunden sind.

Es soll z. B. der Bruch $\frac{a^2}{a^2-x^2}$ in eine unendliche Reihe aufgelöst werden, da nun $\frac{a^2}{a^2-x^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2-x^2}$, und

$$\begin{array}{l|l} x^2 & a^2-x^2 \\ \hline -\frac{a^2x^2}{a^2}-\frac{x^4}{a^2} & \frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6} \text{ ꝛc.} \\ \quad -\frac{a^2x^4}{a^4}-\frac{x^6}{a^4} & \\ \qquad -\frac{a^2x^6}{a^6}-\frac{x^8}{a^6} & \end{array}$$

folglich $\frac{a^2}{a^2-x^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6}$ ꝛc.

Wenn nun $\frac{a^2}{a^2+x^2}$ gegeben wäre, so würde da $\frac{a^2}{a^2+x^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2+x^2}$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & a^2+x^2 \\ \hline \frac{a^2x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^2} & \frac{x^2}{a^2}-\frac{x^4}{a^4}-\frac{x^6}{a^6} \text{ ꝛc.} \\ \quad -\frac{a^2x^4}{a^4}-\frac{x^6}{a^4} & \\ \qquad \frac{a^2x^6}{a^6}-\frac{x^8}{a^6} & \end{array}$$

folglich $\frac{a^2}{a^2-x^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} - \frac{x^8}{a^8}$ ꝛc.

Nach solchen, und keinen andern Gründen können die zu den Gliedern unendlicher Reihen gehörigen Zeichen abgeleitet werden.

Von den Logarithmen.

1) Die Logarithmen sind Glieder einer arithmetischen Reihe, welche Glied vor Glied mit einer geometrischen correspondiren.

2) Es sey a eine Zahl, welche etwas größer, als die Einheit ist; es sey m der Exponent der Würde, auf welchen a erhoben worden, so daß $a^m = b$, so ist m der Logarithmus von b, folglich $m = L.b$. Es sey ferner $a^n = c$ so wird $n = L.c$, wenn man nun die beyden Gleichungen miteinander multiplicirt, so bekömmt man $a^m \times a^n = a^{m+n} = bc$, es ist aber $m + n = L.bc$. Addirt man nun die beyden Gleichungen, so wird $m = L.b + n = L.c$, und $m + n = L.b + L.c$, es ist also $L\,bc = L\,b + L\,c$, das heißt, der Logarithmus eines Products ist gleich der Summa der Logarithmen der beyden Factoren.

Es sey $b = c$, so wird $L\,b^2 = L\,b + L\,b = 2\,L\,b$, und überhaupt $L\,b^m = m\,L\,b$, folglich der Logarithmus irgend einer Potenz, ist das Product m

des

des Logarithmis seiner Wurzel. Aus diesem folgt:

$$L\,ab = L\,a + L\,b$$

$$L\,\frac{a}{b} = L\,a - L\,b$$

$$L\,a^m = m\,L\,a$$

$$L\,a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\,L\,a$$

$$L\,\frac{ab+bc}{m+n} = L\,b + L(a+c) - L(m+n)$$

$$L\,\frac{ax^m}{r^n} = L\,a + m\,L\,x - n\,L\,r$$

$$L\,\sqrt{}(x^2+y^2) = \tfrac{1}{2}\,L(x^2+y^2)$$

$$L\,\sqrt{}(x^2-y^2) = \tfrac{1}{2}\,L(x+y) - \tfrac{1}{2}\,L(x-y)$$

$$L\;(a^2-x^2) = L\,(a+x) + L\,(a-x)$$

$$L\sqrt[n]{}(a^2-x^2)^n = \tfrac{m}{n}\,L(a-x) + \tfrac{m}{n}\,L(a^2+a^2+x^2)$$

$$L\,3a^2 + L\,a^4 + 5\,L\,3 = L\,3 + 2\,L\,a + 4\,L\,a + 5\,L\,3$$

$$= 6\,L\,3 + 6\,L\,a = 6\,L\,3\,a = L\,3\,a^6.$$

Sechs=

Sechster Abschnitt.

Theorie und Zweck der algebraischen Gleichungen.

Wenn eine unbekannte Größe mit einer bekannten verglichen wird, so ist sie bekannt; wenn daher unbekannte Dinge mit bekannten modifizirt werden, diese unbekannten so zu entwickeln, daß sie bekannten gleich werden, ist der Zweck und die Grundlage der Theorie der algebraischen Gleichungen.

Da die Bedingnisse, nach welchen unbekannte Größen mit bekannten verglichen werden können, so verschieden sind, als es Zahlen giebt, dieselben aber nicht anders modifiziet werden können, als nach den Grundsätzen, welche in dem vorhergehenden enthalten sind, so folgt, daß die Auflösung der Gleichungen, nur in Rücksicht der Modification der Größen, auf Algebra, und also auf allgemeinen Gesetzen beruht, dieselbe aber keineswegs hinreichend sey, eine unbekannte Größe zu finden, sondern nur das Unbekannte aus dem Bekannten zu entwickeln; eine genaue Kenntniß der Natur, des Gegenstandes, mit

wel-

welchem die unbekannte Größe modifizirt worden, ist also hier unentbehrlich, z. B. der arithmetischen Größen, der Geometrie u. d. gl.

So würde man z. B. gleich sehen, daß, wenn eine Gleichung wie $x^2 = 35$ gegeben wäre, die unbekannte Größe falsch ausgedrückt worden sey, da 35 keine Quadrat-Zahl, sondern Product von 7 . 5 ist, die unbekannte Größe soll also wie xy ausgedrückt seyn, auch würde man durch diese Auflösung sehen, daß, da die Factoren von 35 beyde Prim-Zahlen sind, keine andere Auflösung statt habe, welches sich nicht so verhalten würde, wenn $xy = 24$ gegeben wäre, wo so viele Auflösungen statt haben würden, als dieses Product Factoren hat. Der Ausdruck $x^2 = 35$ ist so ungereimt, als wenn man $2x = 7$ setzen wollte, da man $x + y = 7$ hätte setzen sollen, wo $x + y = 4 + 3$ wird, $2x = 7$, ist nie möglich, da der Ausdruck des Unbekannten ganze Zahlen ausdrückt. Ueberhaupt bemühe man sich nicht bey Bildung einer Gleichung weniger unbekannte Größen auszudrücken, als die Aufgabe erheischt, da man hiedurch immer sieht, wie die bekannte Größe modifizirt worden, so sieht man z. B. in einer Gleichung wie $xyz = 36$, ohne Anstand das 3 Factoren von 36 entwickelt werden müssen,

wel-

welche, wenn keine andere Bedingniß in der Gleichung herrscht, nach Belieben genommen werden können, ungleiche Factoren einer Gleichung, zum Theil gleich bezeichnen, heißt sich die Auflösung derselben unnütz erschweren, aus was für Gründen wollte man das Product der Factoren $(x-7) \times (y-5) = (xy-79) - (5x-35)$ wie $(x-7) \times (x-5) = (x^2 - 12x + 35)$ ausdrücken, da doch der Ausdruck $x^2 - 12x + 35$, nicht allein falsch ist, sondern auch die Auflösung der Gleichung erschwert.

Da nun aus obigen folgt, daß eine Gleichung bey der Transposition ihres zweyten Gliedes immer gleich null wird, wie $xyz - 36 = 0$, $x^3 - 8 = 0$ u. d. gl. so folgt, daß auch deren Factoren gleich null werden müssen, wenn nun eine Gleichung der mte Grade eines solchen Factors ist, welcher bey der Erhebung zur mten Würde als eine zweytheilige Größe betrachtet worden, so ist immer die unbekannte Größe die mte Wurzel der bekannten, so ist z. B. $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 - 12x - 8$, $x = \sqrt[3]{8}$ d. i. $x = 2$.

Da ferner in einem Producte wie z. B. $(x-4) \times (y-3) \times (z-2) = (xyz - 4xz - 3xz - 12z)$
$- (2xy$

— $(2xy - 8x - 6x - 24)$ die Gesetze der Coefficienten bekannt sind, wenn man diese Factoren gleich $(x - a)$, $(y - b)$, $(z - c)$ setzt, so ist klar, daß die Auflösung einer solchen Gleichung nicht die geringste Schwierigkeit hat.

Was die Fälle betrifft, wo man auf eingebildete Größen stößt, so sieht man aus obigen, was man von selben überhaupt zu halten habe, sie verdienen also keine Bemerkung.

Von den Gleichungen vom ersten Grade.

Gleichungen vom ersten Grade sind jene, in welchen die unbekannten Größen den ersten Grad nicht übersteigen, folglich eins zum Exponenten haben.

Wir wollen bey jenen den Anfang machen, welche nur eine unbekannte Größe enthalten.

1) Eine unbekannte Größe kann mit andern Größen durch die Addition, Subtraction, Multiplication, und Division verbunden seyn. So wie z. B.

$x + 3 = 7$ und $x = 7 - 3$.

$x - 3 = 4$ folglich $x = 4 + 3$.

$3x = 18$ also $x = \frac{18}{3} = 6$.

$x^2 = 16$ also $x = \sqrt{16} = 4$ und endlich

$\sqrt[3]{x^3} = 3$, folglich $x = (3)^3 = 27$.

Es

Es sey z. B. 1600 in drey Theile zu theilen, so daß der erste um 200 größer als der zweyte, und der zweyte um 100 größer als der dritte sey; es wird also der dritte Theil x, der zweyte x + 100, und der erste x + 100 + 200 seyn, die Summa dieser Theile ist also 3x + 400, dieses soll aber gleich 1600 seyn, folglich 3x + 400 = 1600 folglich 3x = 1600 — 400, und 3x = 1200, durch 3 getheilt giebt x = 400 Theil des ersten, 400 + 100 = 500 Theil des zweyten, 500 + 200 Theil des dritten, und 400 + 500 + 700 = 1600.

2) Die Summa zweyer Größen und ihre Differenz ist gegeben die beyden Größen zu finden.

Es sey a deren Summa, b deren Differenz, x die größere dieser beyden Größen, und y die kleinere, so wird $x + y = a$, und $x - y = b$, wenn man nun den Werth von x in der zweyten Gleichung nimmt, so wie $x = b + y$, substituirt man ferner diesen Werth in der ersten Gleichung, so wird dieselbe $b + y + y = a$ und $2y = a - b$, folglich $y = \frac{a-b}{2}$, wenn man nun diesen Werth von y in der ersten Gleichung substituirt, so wird $x + \frac{a-b}{2} = a$, folglich $2x + a - b = 2a$, oder $2x = 2a - a - b = 2x = a + b$ und endlich $x = \frac{a+b}{2}$.

Auf

Auf dieses gründet sich folgende Aufgabe: Ein Kourier ist von München vor 9 Stunden abgereist, welcher 5 Meilen in 2 Stunden zurücklegt. Nach dieser Zeit schickt man einen andern nach, welcher 11 Meilen in 3 Stunden macht; es fragt sich, wann der zweyte den ersten Kourier einholen wird?

Es sey x der Weg, welchen der zweyte Kourier zurückgelegt hat, um den ersten einzuholen, so ist gewiß, da dieser Kourier einen Weg zurückgelegt haben muß, welcher dem gleich ist, den der erste während den 9 Stunden und denjenigen, welchen dieser erste Kourier während der zweyte ihm einzuholen eilte, gleich seyn müsse. Um also den Weg zu finden, welchen der erste Kourier während den 9 Stunden, welche er voraus hatte, gemacht hat, setze man folgendes Verhältniß: 2 St. : 5 St. = 9 M $\frac{45}{2}$ M. Um nun den Weg zu haben, welchen derselbe während des Laufes des zweyten zurücklegte, so suche man, wie viel Zeit der erste Kourier angewandt hat, den Weg x zurückzulegen, da nun derselbe 9 Meilen in 3 Stunden zurücklegt, so setze man folgendes Verhältniß: 11 M. : 3 M. = x St. $\frac{3x}{11}$ St. Der erste Kourier wird also $\frac{3x}{11}$ in dieser Zeit zurückgelegt haben; der Weg, welchen der zweyte in der Zeit x zurückgelegt hat, wird seyn $2 : 5 = \frac{3}{11}x : \frac{15}{22}x$,

der

der ganze Weg endlich $x = \frac{45}{2} + \frac{15}{22}x = x = 70 + \frac{5}{7}$, der zweyte Kourier wird also den ersten auf $70\frac{5}{7}$ Meilen von München antreffen.

Wenn eine Gleichung vom ersten Grade mehrere unbekannte Größen enthält, so bilde man so viele Gleichungen als unbekannte Größen sind, nehme in jeder Gleichung den Werth einer unbekannten Größe, und subtrahire denselben in allen übrigen Gleichungen, worauf man eine Gleichung, und eine unbekannte Größe weniger haben wird, mit diesen neuen Gleichungen verfahre man ebenfalls so, und auf diese Art mit allen übrigen, bis keine unbekannte Größe mehr vorhanden ist.

Es sey z. B. ein Klumpen Gold mit Silber vermischt, welcher 30 L. wiegt, der körperliche Inhalt dieser Massa aber ist 3 Kubikzoll, man weiß ferner, daß das Gewicht eines Kubikzolls Gold $12\frac{2}{3}$ Loth ist, jenes eines Kubikzolls Silbers hingegen nur $6\frac{8}{9}$ Loth sey. Wie viel enthält diese Vermischung Kubikzoll Gold und Silber. Es ist folglich $x + y = 3$ und $x \times (12\frac{2}{3}) + y \times (6\frac{8}{9}) = 30$. Bestimmt man nun den Werth von x in diesen zwey Gleichungen, so wird $3 - y = \frac{270 - 62\,y}{114} = 342 - 114\,y = 270 - 62\,y = 52\,y = 72$ und $y = \frac{72}{52} = \frac{18}{13}$; folglich

$x = 3 - \frac{18}{13} = \frac{39-18}{13} = \frac{21}{13}$. Das Mixtum enthält also $\frac{21}{13}$ Theile Gold, und $\frac{18}{13}$ Theile Silber.

3) Wenn die Summa zweyer Zahlen, und deren Prduct gegeben, und man hieraus diese Zahlen bestimmen soll, so wird, wie schon erwiesen worden, $x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$, und $y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$, deren Product also $xy = \frac{1}{4}s^2 \pm \frac{1}{4}d^2 = p$, folglich $\frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}s^2 - p$ und $x = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$, und $y = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$.

Es seyen z. B. zwey Zahlen zu bestimmen, deren Product gleich 48, und deren Summa gleich 14, so wird in obiger Formul $s = 14$ und $p = 48$, folglich $x = 7 + \sqrt{49 - 48}$ und $y = 7 - \sqrt{49 - 48}$, folglich $x = 8$ und $y = 6$, und $8 + 6 = 14$, und $8 \times 6 = 48$.

Von den Gleichungen vom zweyten Grade.

1) Wenn in obiger Formul $x = y$ ist, so heißt eine solche Gleichung eine quadratische Gleichung. Wenn daher eine solche Gleichung die zweyte Würde ihres Factors ist, so ist die Auflösung nicht der geringsten Schwierigkeit unterworfen. Es sey z. B. eine Zahl zu finden, welche kleiner als 1, und deren

Qua-

Quadrat $\frac{1}{4}$ ist, es wird also $(1-x)^2 = \frac{1}{4}$, d. i. $(1-x)-(x-x^2) = \frac{1}{4}$ und folglich $\sqrt{(1-x)-(x-x^2)} = \frac{1}{2}$ folglich $1-x = \frac{1}{2}$, und endlich $x = \frac{1}{2}$.

Aus folgendem Beyspiele kann man sehen, wie unnütz man sich die Auflösung von Gleichungen erschwert hat, welche nicht der geringsten Schwierigkeit unterworfen sind. So wird, wenn zwey Zahlen gegeben sind, von denen eine um 6 größer als die andere, und deren Product 91 ist, gefunden werden solle, $xy = 91$, da nun 91 keine andern Factoren hat, deren Differenz 6 ist, als 13 und 7, so ist $x = 13$, $y = 7$, und $x - y = 6$, $xx = 91$. Aus was für Gründen wollte man eine solche Gleichung wie $x^2 + 6x = 91$ ausdrücken?

Eben so verhält es sich, wenn man z. B. eine Zahl bestimmen sollte, von deren Quadrat 9 abgezogen, so viel über 100 übrig bleibe, als die Zahl unter 23 ist. Es wird also $x^2 - 109 = 23 - x$ folglich $x^2 + x = 109 + 23$, und $x^2 + x = 132$, da nun $132, = 121 + 11$, so ist $x^2 = 121$, und deren Wurzel $x = 11$.

Eben so wird $6x^2 + \frac{1}{2}x = 30, = x^2 + 3x = 180$, folglich $x^2 + 3x = 144 + 36$, da nothwendig das in dieser Zahl enthaltene höchste Quadrat, mehr dreymal dessen Wurzel in 180 enthalten seyn muß — mehr Kenntniß der Natur der arithmetischen Zahlen, Tabellen von den Eigenschaften derselben berechnet; wird mehr nützen, als ein unnützes Formuln-Geschmier, welches zu nichts dient, als den Lernenden zu ermüden.

Von den Gleichungen vom dritten Grade.

1) Wenn eine Gleichung von $(x - a)^3$ resultirt, so ist immer $x = \sqrt[3]{a^3}$, und $x - a = 0$. Es ist folglich eine solche Gleichung nicht der geringsten Schwierigkeit unterworfen, nur hüte man sich bey derselben Auflösung, nicht in den Irrthum zu verfallen, daß man dieselbe in $x^3 - a^3 = 0$ ausdrückt, und wie die dritte Würde von $(x - a)^3$ behandelt, denn $x^3 - a^3$ ist Resultat von $(x^2 + ax + a^2).(x - a)$, als zweytheilige Größe betrachtet, kann also niemals Cubus von $x - a$ seyn, da $(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 - 3a^2x - a^3$ ist, wenn daher $x^3 = a^3$, als Gleichung vom dritten Grade gegeben ist, so muß jedes Glied vor sich behandelt werden; es wird folglich $x = \sqrt[3]{a^3}$, d. i. $x = a$ und $x - a = 0$, oder wenn

man die dritte Würde der zweytheiligen Größe $(x - a)$ in eine Gleichung setzt, so müssen auch alle Glieder des Products angesetzt werden. Der Ausdruck $(x^3 - a^3)$ kann niemals, wenn von Gleichungen die Rede ist, Resultat von $(x^2 + ax + a^2) . (x - a)$ seyn, weil ein solches Product, wenn auch $x - a$ gleich null $x^2 + ax + a^2$ nie null gleich gesetzt werden kann. Daher rührt der Irrthum, in welchen Herr Professor Euler in seiner Anleitung zur Algebra S. 123 in Rücksicht der Gleichung $x^3 = 8$ verfällt, welche keine andere Auflösung als $x = \sqrt[3]{8}$ d. i. $x = 2$ hat.

2) Eine jede Gleichung, sie sey von einem Grade von welchen sie wolle, hat nicht mehr Auflösungen als Factoren. Ein wiederholter Factor ist aber kein wirklicher; eine Gleichung vom dritten Grade also, wie obige z. B. hat also nicht 3 Factoren, so wie a^3 nicht 3 Wurzeln.

3) Wenn daher eine Gleichung Resultat der Multiplication ungleicher Factoren miteinander ist, so gehört dieselbe im ersten Grade, so wie z. B. $(xyz - 3yz - 2xz - 6z) - (xy - 3y - 2x - 6)$ deren Auflösung nur dann einer Schwierigkeit unterworfen seyn würde, wenn man sie wie $x^3 - 11x - 6$, oder gar wie

$x^3 + 11x - 6$ ausdrücken wollte, wozu niemals ein Grund vorhanden seyn kann, der mit reiner Vernunft vereinbar ist.

Eben so verhält es sich, wenn man eine Gleichung, welche Product der Factoren $(x-2)$ $(y-4)$ $(z-2)$ ist, wie $x^3 + x^2 - 34x + 56 = 0$ ausdrücken wollte.

Es sey z. B. $x^3 = 6x + 9$ folglich $x^3 - 6x = 9$ ein Kubus also, dessen Wurzel 6mal von ihm abgezogen 9 gleich wird, erfüllet die Bedingungen der Gleichung, aus der Arithmetik wissen wir, daß $(3)^3$ eine solche Zahl ist, es ist folglich $x = 3$ und $27 - 18 = 9$.

Eben so ist $x^3 - 3x = 2$, d. i. $8 - 6 = 2$, und $x = 2$; $x^3 - 9x = 28$, d. i. $64 - 36 = 28$ und $x = 4$; ferner $x^3 - 18x = 35$, und $125 - 90 = 35$ und $x = 5$, auf eben diese Art würde man finden, daß $x^3 - 6x = 40$, $64 - 24 = 40$ und $x = 4$, und $x^3 + 6x = 7 = 1 + 6 = 7$, und $x = 1$. Nur Irrwege konnten uns also die Auflösung solcher unbedeutenden Aufgaben erschweren, welches daher kam, daß man durch die Algebra die Natur der arithmetischen Größen kennen lernen wollte, welches

kei:

keineswegs derselben Bestimmung ist. — Der Zweck der Algebra ist, die Gesetze auf eine allgemeine Art anzuzeigen, nach welchen Größen modifizirt werden; sie zeigt nicht, daß $a + a = 4$, sondern $= 2a$ sey, und nur die Arithmetik lehrt uns, daß, wenn $a = 2$ $2a = 4$ sey.

Es seyen ferner z. B. zwey Zahlen, deren Differenz 12 ist. Wenn man nun diese Differenz mit der Summa ihrer Cuborum multiplicirt, so wird dieses Product 102144. Es ist folglich $x - y = 12$, folglich $(x^3 + y^3) . 12 = 102144$, folglich $x^3 + y^3 = \frac{102144}{12} = 8512$, folglich muß die Größe 8512 die beyden Cuben enthalten, welche, wie wenig man die Natur der Zahlen kennt, jene von $(20)^3$ und $(8)^3$ sind, da ersterer 8000, und letzterer 512 ist, die Differenz deren Wurzeln aber 12 ist.

Es seyen ferner zwey Zahlen zu finden, deren Differenz 18, wenn man aber die Differenz ihrer Cuborum mit deren Summa multiplicirt, das Product 275184 werde.

Es ist folglich $x - y = 18$ und $(x^3 - y^3) . (x + y) = 275184$, folglich $(x^3 - y^3) = \frac{275184}{x + y}$. Es

muß

muß aber $x = y + 18$ seyn, wenn man nun in diesen Theiler statt x, $y + 18$ setzt, so muß $2y + 18$ ein Theiler von 275184 seyn, dieses ist nicht $y = 1$ gesetzt, noch wenn man selbes gleich 2, 3 setzt, wohl aber, wenn $y = 4$ genommen wird, wo $2y = 8 + 18 = 26$ wird, folglich $\frac{275132}{26} = 10584$, es ist folglich da $x = y + 18$, $x = 22$ dessen Cubus 10648, und $x - y = 22 - 4 = 18$, $(y)^3 = (64)$ folglich $10649 - 64 = 10584$, und endlich $10584 . 22 + 4 = 275184$; ferner, wenn man zwey Zahlen finden wollte, deren Differnnz 720 ist, und welche die Eigenschaft haben, daß, wenn man die Quadrat-Wurzel der größern mit der kleinern mnltiplicirt, 20736 zum Product erhält. Es sey x die größere, und y die kleinere, so wird $x^2 - y = 720$, und $\sqrt{x^2} y = 20756$,

folglich $\sqrt{x^2} = \frac{20736}{y}$, es muß also die Größe

20736 aus zwey Factoren bestehen, deren der eine zum Quadrat erhoben, um 720 größer ist, als der andere, eine Tafel, wie ich oben erwähnt habe, würde uns zeigen, daß dieselbe 476 und 36 sind, deren Product $= 20736$, und $(36)^2 - 576 = 1296 - 576 = 720$.

Die Bedingnisse anzeigen, wie das Unbekannte entwickelt werden muß, dieses kann die Algebra, die

Natur

Natur arithmetischer Größen in Rücksicht ihrer Bestandtheile erkennen lernen, kann nur die Arithmetik.

Wenn eine solche Gleichung die dritte Würde eines Decimal-Bruches z. B. wäre, folglich deren Wurzel durch Annäherung bestimmt werden muß, so wird man, da die bekannte Größe, diese zu irgend einer Würde erhobenen Irrational-Größe, nothwendig dieses ausdrücken wird, nur die Wurzel derselben ebenfalls durch Annäherung bestimmen, und dieselbe der Wurzel der unbekannten Größen gleich setzen. So wird $x^3 - 0{,}1250x - 0{,}015625$, keine andere Auflösung haben, als $x = \sqrt[3]{0{,}015625} = 0{,}25$.

Wenn die Factoren einer Gleichung unter sich ungleich sind, so sieht man ohnehin schon, ob dieselben lauter gebrochene Zahlen, oder mit ganzen und gebrochenen Zahlen vermischt sind, welches die Coefficienten der Glieder der Gleichung anzeigen, eine solche Gleichung aufzulösen ist also nicht der geringsten Schwierigkeit unterworfen.

Man sieht also, daß, wenn man eine solche Gleichung falsch, wie z. B. $(x - 0{,}25) \cdot (x - 1428) \cdot (x - 0{,}1111)$ ausdrücken wollte, man sich die Auflösung

lösung derselben unnütz erschweren würde. Die Auflösung einer Gleichung, welche eine Irrational-Wurzel hat, ist also eben so wenig Schwierigkeit unterworfen, als eine jede andere.

Von den Gleichungen vom vierten Grade.

In Rücksicht der Gleichungen, in welchen der Exponent der unbekannten Größe 4 ist, und welche daher Gleichungen vom vierten Grade genannt werden, bleibt alles dasselbe anwendbar, was von allen vorigen vorgetragen worden.

Sind dieselben die vierte Würde einer zweytheiligen Größe nach der Art der vorigen, so ist die Auflösung derselben nicht mehr Schwierigkeit unterworfen, als aller übrigen.

Wenn daher die Gleichung aus 4 Factoren bestünde, welche unter sich ungleich sind, so gehört sie keineswegs in die Ordnung der Gleichungen vom vierten Grade, sondern zum ersten.

$x^4 - 12x^3 - 54x^2 - 108x - 81$ ist also eine Gleichung vom vierten Grade, deren Auflösung $x = \sqrt[4]{81}$ d. i. $x = 3$ ist.

Ein

Ein Product von $(x-6).(y-3).(z-2).(x-1)$ ist also keine Gleichung vom 4ten Grade, und wird um so mehr falsch, wie $x^4 - 25x^2 + 60x 36 = 0$ ausgedrückt, als nach der allgemeinen Algebra hier ein Factor, wie $(x+6)=0$ ausgedrückt worden, welches in keinem Falle möglich ist. Die Einwendung, daß, da die übrigen Factoren null sind, dieser durch die Multiplication mit denselben ebenfalls null werden, gehört nicht in die Reihe vernünftiger Dinge, da Null eine Größe weder vermehrt noch vemindert, daher dieselbe niemals Null werden kann, als wenn sie auf sich selbst entgegengesetzt wirkt, dann erst ist ein Grund vorhanden, sie nullmal zu nehmen.

Nach eben den Grundsätzen kann eine Gleichung, sie sey von einem Grade von welchen sie wolle, behandelt werden, alle Schwierigkeiten sind also in dieser Rücksicht, wenn man die Grundsätze befolgt, auf welche uns reine Vernunft geleitet hat, gehoben.

Die Art, wie eine Aufgabe in eine Gleichung gebracht werden muß, kann durch Beyspiele in etwas gezeigt werden, ist aber niemals allgemeinen Gesetzen unterworfen, nachdem die Bedingnisse solcher Aufgaben unendlich verschieden sind. Die Algebra

kann

kann also nichts als anzeigen, wie in einer Aufgabe das Unbekannte mit dem Bekannten modifizirt und verglichen worden, aus welchen man folgern kann, wie die bekannte Zahl modifizirt werden muß, und dieses beruht auf der Kenntniß der Natur der arithmetischen Größen.

So würde man ohne weiters sehen, wenn man arithmetische Tabellen, oder sonst Kenntniß der arithmetischen Größen genug hätte, das in der Gleichung $x^5 - 4x = 248784$, folglich $x^5 = 245784 + 4x$ $x = 12$; denn $\sqrt[5]{248784} = 12$ und $248784 + 48 = 248832$ seyn.

Von den vermischten Gleichungen.

Vermischte Gleichungen sind den nämlichen Gesetzen unterworfen, wie alle übrigen, so wenn z. B. $x^2 . y = 48$, so wäre $x^2 . y = 1634$, folglich $x = 4$, $y = 3$.

Wenn ferner $x - y = 3$ und $\frac{x^2}{y} = 12$ so wird $x^2 = 12 . y$, da nun weder $y = 1$, noch $y = 2$ die Auflösung giebt, so wird $y = 3$, folglich $x^2 = 36$, d. i. $x = 6$, $y = 3$, und $x - y = 6 - 3 = 3$.

Eben

Eben so giebt es Gleichungen, welche mehrerer Auflösungen empfänglich sind, und solche, welche gar nicht aufzulösen sind, die ersteren sind z. B. wie $x^2 = 100x - 2400$, wo nach der Formul $x = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$ $y = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$, $\frac{1}{4}s^2 > p$ wird, welches, wie man aus den Producten gleicher Factoren, das ist, ans den reinen quadratischen Gleichungen leicht ersehen kann, niemals möglich, auch giebt die Auflösung dieser Gleichung $x = 50 + \sqrt{2500 - 2400}$ und $y = 50 - \sqrt{2500 - 2400}$, folglich $x = 60$, $y = 40$. Es fehlt derselben also eine Bedingung.

Auf diesem Falle gründet sich also die unbestimmte Annalytik — auf Mangel an Bedingnisse, so wie z. B. $x + y = 10$ u. d. gl. Eben so würde eine Aufgabe wie folgende unbestimmt bleiben. Zwey Personen haben in einem Handlungsgeschäft gemeinschaftliche Sache gemacht: der eine gab 30 Louisd'or, der andere aber dessen Beytrag nicht bekannt ist, erhält für seine Einlage mit seinem Gewinnste 26 Louisd'or, der ganze Gewinnst betrug $18\frac{3}{4}$ Louisd'or: was war des zweyten Einlage? Wenn x des ersten Einlage, und y jene des zweyten ist, so wird $x = 18\frac{3}{4} - y$, da nun die Zeit, in welcher die Einlagen bey der Gesellschaft lagen, nicht auf die Größen

wir-

wirkend angenommen ist, also mit denselben in keinem Verhältnisse steht, folglich keine andere Bedingniß der Gleichung bekannt ist, als das $x > y$ seyn müsse, so folgt, daß alle Werthe von y, welche diese Eigenschaft haben, zur Auflösung der Gleichung hinreichend sind.

So verhält es sich mit allen übrigen derley Gleichungen, welche auseinander zu setzen, nicht zu meinem Zweck gehört, meine Absicht war die Theorie der Algebra zu verbessern, daß ich dieselbe erreicht habe, ist keiner Einwendung unterworfen, daß ich aber in vieler Rücksicht meinen Gegenstand nicht vorgetragen habe, wie ich sollte, daran sind der äußerst schwer zu bearbeitende Gegenstand, meine ungeübte Feder, und mehrere andere Umstände Schuld. Und nur in dieser Rücksicht bitte ich um Nachsicht.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ranson, Joseph <<von>>,

Algebra nach neuen Grundsätzen bearbeitet

München 1800

Math.p. 452#Beibd.2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137754-7
VD18 14620227-004